ゲージ場入門

I.J.R. エイチスン/著
藤井昭彦/訳

講談社サイエンティフィク

An informal introduction to gauge field theories

IAN J.R. AITCHISON

Lecturer in Theoretical Physics, University of Oxford

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS
Cambridge
London New York New Rochelle
Melbourne Sydney

序　文

相対論的場の量子論は，基本的相互作用を研究する上で最も有効かつ最も生産的な一般的枠組みとして，ゆるぎなく再認識されている。この枠組みの中でも，ゲージ場の理論と呼ばれる一連の理論は，特に関心の的になっている。最近好評の強い相互作用と弱い相互作用の理論はこのタイプであり，従来から定評ある電磁相互作用の理論（量子電磁力学，QED）もまたそうである。現在では，素粒子物理学はほぼ全面的に，ゲージ場の理論にかかわりあっている。

しかし，場の量子論はたちまち高度に形式的に——また，おそろしく難しく——なりやすい分野である。さらにゲージ諸理論の場合，それに特有の多くの技術的複雑さが伴うことも明らかである。このような状況のもとでは，始めからすべての難問に立向えるだけの十分広い形式的な理論を展開するのも一方法であろう。しかし，それでは本質的な数学的・物理的着想は多少ともあいまいにされ，実用的な計算（すなわち Feynman 規則）への道は遠くなってしまう。これとは逆に，重要な物理的内容に重点をおいて，必要があれば類推や発見法的論法の使用も辞せず，形式を極端に切りつめて，より速かに計算の段階に到達するやり方もとれるであろう。A. J. G. Heyと著者の書物“ゲージ理論入門”は後者の方略に従っており，ある意味で本書の相補的役割を果たしている。

本書はまさしく，場の理論の専門書でもなければ，ゲージ諸理論の論究でもない。まず第一に，読者は相対論的場の量子論の初歩の知識を持っていると仮定した。たとえば，主としてスカラー場を中心とした講義をきいていることである。また，スカラー場・スピノル場の正準量子化，簡単なラグラジアンから出発して Wick の定理を経て Feynman 図形に至る道すじも既知とする。場の理論のこのような初等的部分は，特にゲージ場の諸理論の勉学からは分離したほうがよい，と著者は考える。ゲージ理論は独特の特徴と難しさをそなえていて，場の理論の初等コースには向かない，と思われるからである。一方，積極

的な面から言えば，ゲージ諸理論をそれ自体として勉強することは極めて自然である。それがみごとな成功をおさめたという事実を別にしても，ゲージ諸理論の基礎に関しては，対称性という共通の主題のさまざまな変奏により，一貫した統一的な取扱いができるからである。

本書はもちろん場の理論を用いる。しかしその大部分は“非形式的”である。本書は，完全に形式的かつ厳格な取扱いと，Aitchison–Hey の書物のように，場の理論を用いず，計算面を強調した取扱いとのちょうど中間をめざしている。“非形式的”という言葉にはいくつもの意味を含ませたつもりである。一般的かつ抽象的な取扱いを与えるよりも，簡単な例題の適切で特別な場合を主に論ずる。さらに，非常に難しいが重要ないくつかの点を，物理的な概念を強調することで取扱うつもりである。（ユニタリティ，高エネルギー領域での挙動，超流動，超伝導など。）正準形式も，経路積分の方法よりは“非形式的”であると著者は考える。

本書は，そもそもゲージ諸理論の基本概念に重きをおいた入門書であることを意図している。実用的な計算の方法は比較的わずかしか含まれていない。また，現在発展中の分野はごく手短かにしか取扱っていないし，非摂動論的な方法については議論できなかった。しかしながら，初等的と思われる範囲で，ゲージ場の正準量子化の技術的な側面を説明することを試みた。最後の章では，くりこみに関係した多少進んだ諸問題の手ほどきを行っておいた。くりこみ可能性はゲージ理論の主要な性質の1つであるから，たとえ初等的であろうとも，その議論を欠くことはできない。量子化そのものについても，くりこみの過程で特別に微妙な点が生じてくるのである。

初めに述べたように，ゲージ諸理論は対称性と密接に関連している。場の量子論では，対称性に2つの明確な区別があること（“顕在的”対称性と“潜在的”対称性）が今ではわかっている。ゲージ理論にとって基本的なことであるが，対称性はさらに“局所的”と“大局的”に区別される。局所的対称性と力学との関係は，ゲージ理論の中心になる基本的なテーマである。本書の第1部（第1章〜第4章）では，主として局所的・顕在的対称性を論じている。第5章は第2部（第6，7章）との架橋になる章で，後者では隠れた（潜在的）対称性を取扱う。最後の章は第3部で，以前の章ほど詳細ではなく，いくつかの結果については本書以外の文献に委せてある。この章の目的は，重要だがより技術的な側面（それまでに触れていなかった問題）を，しかるべく理解するた

めに必要な手段を紹介することにある。同時に，より専門的な書物を学ぶ階梯を容易にする目的もある。

本書はもともと，1979年９月，マンチェスター大学で開催された“英國諸大学素粒子論夏の学校”で行った講義に基づいている。著者はG. Shaw博士と夏の学校委員会に，ゲージ理論の講義をする招待を下さったことを感謝する。この問題に対する著者の知識は，大部分，ロチェスター大学滞在中（1978～9年）に整理したものである。その１年間，完全に経済的援助を与えて下さったR. T. French会社に深甚なる謝意を表する。ロチェスター大学滞在中，著者はV. S. Mathur教授の講義に出席して大きな恩恵を受け，同教授および素粒子論グループの他の諸氏と多く討論を行った。ここにH. E. Gove教授および物理学教室の各位の厚遇に対し，感謝する次第である。また，オックスフォード大学の同僚，特にC. M. Fraser, R. L. Heimann, C. H. Llewellyn Smith, J. E. Paton, G. G. Rossの諸博士との数多くの討論は有益であった。最後に，本書の原稿を初めから終わりの段階まで注意深くかつ批判的に讀んで下さったP. V. Landshoff博士に厚く御礼申上げる。

1982年１月

Ian J. R. Aitchison

訳　者　序　文

著者 Aitchison 教授には，すでに Hey 教授との共著“ゲージ理論入門”（訳書は昭和 58 年，講談社刊，2 分冊）がある。この前著は，学部高学年・大学院初学年の学生諸君に対して，場の理論ぬきで，相対論的ゲージ力学の考え方と使い方を詳しく解説した‘実用的’な入門書である。そこには計算技術上の know-how が余すところなく呈示されている一方，場の理論を回避した‘便法’のため，理論上の重要事項の基礎づけが不十分であった憾みが残ることも否めない。本書“ゲージ場入門”は，ベクトル場の量子力学と対称性の理論に基いて再びゲージ力学の考え方と手法をていねいに基礎づけ，前著の欠を補っている。その意味で，前著の続編とみなすことができよう。また，ゲージ力学の実用的な計算技法よりも物理的な概念内容に興味を持つ学生諸君にとっては，本書は前著とは独立な，首尾一貫した理論の入門書として受取ることもできよう。

いずれにせよ，原著の標題〝An Informal Introduction〟が示すように，本書はあくまでも‘型式に重きを置かない’‘手引き’なのである。場の量子力学と対称性の理論は，前者は素粒子の時空的性質について，後者はその内部的性質について，われわれの経験を記述するための不可欠の枠組みであり‘型式’である。素粒子の物理を理解するためには鋭意その習得に努めなくてはならないが，一方，できるだけ軽装でゲージ理論に近接するためには，いったいどれだけの準備がいるであろうか。本書は，必要最小限の予備知識だけをまず *ad hoc* にまとめて，ただちにゲージ理論の核心に迫り，いうなれば‘ゲリラ戦法’をしかけて，その中心思想を攻略しようというのである。重装備の‘正規軍’をくり出しての戦略は，より‘型式的’・専門的な書物にゆずってある。

短期間にたくさんの事柄を学ばなくてはならない学部高学年・大学院初学年の学生諸君にとって，本書がなにがしかの役に立つことを念願する次第である。

最後に，本書の上梓についてお骨折りいただいた講談社サイエンティフィクの田代榮之輔さんに，あつく御礼申上げる。

昭和59年12月

藤 井 昭 彦

目　　　次

1

序論と動機

Glashow–Salam–Weinberg の電・弱相互作用の理論（GSW 理論）と，カラーに依存する力に基づいたクォーク間の強い相互作用の理論（量子色力学または QCD）とは，ともにゲージ場の理論である。これらは最古のゲージ場の理論である量子電磁力学（QED）の注目すべき一般化にあたっている。QED は最高度に成功した理論である。GSW 理論には印象的と言ってよいほど大量の実験的支持がある。QCD には，かなりの量の定性的な実験的検証がすでにある上に，強力な理論的議論と結びついて，ますます定量的な検証をかためつつある。次の節で，極めて簡単に強い相互作用と弱い相互作用の特徴の一部を概観し，それがゲージ諸理論の経験的な動機になっていることを述べよう。これはゲージ諸理論を研究するための十分な理由と考えられるであろう。一方，理論がなぜ今あるような形で<u>なくてはならないか</u>，ほかの形になりえなかったのか問うことは，いつも興味あることである。事実，ここに見いだすことは，ある<u>先験的な</u>原理が相互作用の形をきびしく制限し，おそらく決定さえしてしまうということである。

§1・2 では，くりこみ可能性と対称性をこのような原理と考えるのが有効である，という考えを導入するつもりである（たとえば Weinberg 1980 を見よ）。こういう議論はどうしても決定的にはなりえないが，それにもかかわらず，ゲージ理論の最初の動機として教育的に好ましいと考えられる。ゲージ理論は，たとえ概念として美しいとしても，技術的に非常に複雑だからである。以下に述べるいくつかの概念は，たとえなじみの薄いものであっても，その後の各章で詳しく論ずるから，読者は安心していてよろしい。

1・1　実験上の動機

まず，QCD から始める。現在，ハドロン（強粒子）は，クォーク（構成子，

記号qで表わす）と反クォーク（同じく$\bar{q}$で表わす）から成る複合粒子であるというたくさんの分光学的証拠がある。クォークは，フレイバー（香り。アイソスピン，ストレンジネス，チャームなどの性質）の自由度のほかに，３つの値（“赤”・“緑”・“青”と呼ぶ）をとるカラー（色）の自由度を持つ。原子が中性であるのと類似して，今まで観測されたすべてのハドロンは，正味のカラーを持っていない。クォーク間の力はカラー依存性を持つはずである。そうでなければ，$q\bar{q}$構造を持つひとつひとつの“無色の”中間子には，８個の帯色した中間子が縮退していることになるが，このような事実はまだ観測されたためしがない。クォーク間の力は，おそらく，グルーオン（膠着子）と呼ぶカラー量子数を担った場の量子によって伝達されると考えられる。実際，核子による電子（記号e）・ミューオン（μ）・ニュートリノ（ν）の深非弾性散乱から，高速で運動している核子のおよそ50％の運動量は，電磁力に対しても弱い力に対しても相互作用を持たない粒子によって担われている，という事実があり，これらの粒子がグルーオンであると同定されている。グルーオンは，奇数のスピンを持つべきである。偶数スピンの場の量子は，粒子と反粒子とに全く同じ結合をするから，$q\bar{q}$構造の中間子に，歓迎されざるqq状態が縮退してしまうからである。最も簡単な可能性はスピンJが１の場合である。この選択はさらに具合のよいことがある。クォークの質量が０になる極限では，ベクトル粒子（$J=1$）によって伝達される力の理論はカイラル対称性（§6・8参照）を顕わすことになるが，ハドロンの物理には近似的なカイラル対称性が存在することを示す強力な証拠がある。（“隠れた”形で実現されている。第６章を見よ。）

クォーク間の力のカラー依存性については，極めて特殊な“飽和”性（qqqおよび$q\bar{q}$構造は存在しうるが，たとえば$qqq\bar{q}$とか$q\bar{q}q$という構造は存在しえない）が，カラー自由度が$SU(3)$［対称群$SU(3)_C$と記す］に従うと仮定すれば，定性的に理解することができるのである。もしクォークが$SU(3)_C$群の３次元表現に属し，グルーオンが８次元表現に属するならば，クォーク間の$SU(3)_C$不変な１グルーオン交換力は，qqqおよび$q\bar{q}$のカラー１重状態に，それ以外のカラー非１重状態（たとえば$q\bar{q}q$）より低いエネルギーを与える結果になる。さらに，１グルーオン交換機構を抽象化した短距離のスピン依存力は，バリオン（重粒子）間の質量格差を極めて簡単に，極めて巧みに説明できるのである（Close 1979，Isgur and Karl 1979）。

帯色した３重子のクォークが，帯色した８重子のグルーオンを交換して$SU(3)_C$

不変な相互作用を行うというこの理論は，まだ量子色力学（QCD）ではない。QCD を得るには，さらにひとつ実験上の証拠をつけ加えなくてはならない。核子の内部のクォークは，レプトン（弱粒子）の深非弾性散乱で検出されたときに，本質的に自由粒子であるように振舞うのである（総合報告として Close 1979 を参照せよ）。この事実は，クォーク間の力は短い距離においては弱くなることを意味する。もしクォーク間の距離が 0 になれば，力はなくなってしまうであろう。この性質は“漸近的自由性”（§8・4 参照）として知られ，ある決まった種類の理論，すなわち非可換ゲージ理論のみが持つきわだった性質である（Politzer 1973，Gross & Wilczek，1973 a）。もちろん，本書の大部分でこれらの理論の解説をするつもりであるが，今のところは，QCD は量子電磁力学（QED）のある拡張になっている理論で，1 個の光子に類似する役割を 8 個のグルーオンが果たし，QED のゲージ不変性はカラー群 $SU(3)_C$ を含むより複雑な非可換ゲージ不変性に一般化される，とだけ述べておこう。（以下の章，特に第 3 章でさらに議論する。）

以上は，QCD に向いている強い相互作用の物理のある顕著な一面を極めて簡単に概観したに過ぎない。この理論と実験との詳細な比較となったたくさんの仕事がこれまでになされたし，まだたくさんの仕事がなされずに残っている。QCD は強い相互作用の理論であるというまさにその事実の故に，はかばかしい進歩はしていない。

QED の抜群の予言能力は，まったく摂動論の利用に拠っているのであるが，摂動論は一般的に強い相互作用には応用できない。しかし，漸近自由性の性質によって，少なくともある運動学的極限においては，摂動論的 QCD が実験に適用できるという希望をもつことができる。ここで，さらに詳しく摂動論的 QCD の現状を経験事実に則して概説することは当を得ない。その内容はすでに十分に豊富だが，まだ活発に発展中だからである。非摂動論的な方法が開発されるにつれ，将来さらに発展が期待されている。

ここで弱い相互作用に眼を転じよう。現段階での素過程としては，これはレプトンとクォークの間で起こると考えられている。弱い相互作用の実験的知識は非常に豊富に存在する。しかし，すぐ述べる理由によって，理論と実験の間に極めて頼もしい一致があり，今まで決定的な不一致は見いだされていないのにもかかわらず，実験はただちに，GSW 理論に導くわけではない。

GSW 理論の主要な定性的予言は，“弱い中性カレント”の過程が存在する

ということであった。$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ や，$\nu_\mu + p \to \mu^- +$（その他粒子）　のような，普通の Fermi 型の過程は昔からよく知られていた。これら“荷電カレント”の過程では，レプトンの対は1単位の電荷を帯びているのである。1973年，$\nu_\mu + p \to \nu_\mu +$（その他粒子）　のようにレプトン対が中性である過程が存在することが確立された（Hasert *et al*, 1973 ; Benvenuti *et al*, 1974）。もちろん，このような過程が単に存在するだけでは，GSW 理論が成立つ必要条件にすぎず，十分条件ではない。中性カレントを含むいろいろなほかの理論もありうるのである。

弱い相互作用の次に重要な特徴は，その到達範囲である。Fermi のもともとの理論（Fermi, 1934 a, 1934 b）では，ベータ崩壊　$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$　は到達範囲ゼロと仮定された。今日に至るまで，どんな弱い相互作用にも有限の到達範囲という証拠はない。別の言い方をすれば，Fermi の理論は“点状”である。すなわち中性子が陽子に変りレプトン対 $e^- \bar{\nu}_e$ が放出される過程は，時空間のただ1点で生起する。ラグランジアンの中では，このような相互作用は4つの関与するフェルミオンを表わす場の積を，同じ時空間の点で算出した項を含むであろう。これが“4フェルミオン”相互作用である。このタイプの相互作用は，力は場の量子の交換によって生ずるという湯川の物理像とは根本的に異なっている。湯川の物理像では，中性子は弱い相互作用の量子 W^- を放出して陽子に変じ，W^- 粒子はその後異なる時空間の1点で物質化して $e^- \bar{\nu}_e$ 対を生ずるのである。ほかの荷電カレント過程では同じような W^+ 粒子を含み，中性カレントの過程では中性量子 Z^0 を含むであろう。いつものように，このような量子が伝播しうる距離が弱い力の到達範囲であって，量子の質量に逆比例する。相互作用の到達範囲の実験的な上限は，このような量子が存在するとすればその質量の下限を与える。

量子力学で周知のように，短い距離での相互作用の振舞いは，高いエネルギーで実験を行うほどよく露わになる。現在では，ベータ崩壊のような弱い崩壊過程で解放されるエネルギーより格段に高いエネルギーを持つレプトンのビームが得られている。弱い力の到達距離がゼロである証拠は，ニュートリノで誘起される反応を調べて，4フェルミオン相互作用のモデルで予言される“点状”の振舞いからのずれを探せばよい。これは，点電荷の Rutherford 断面積と散乱のデータとを比較して，有限な原子核の大きさを見いだしたことと同様である。湯川の物理像の枠内で言えば，現在のデータにずれが見られないことから，

弱い量子 $W^{\pm}$ 粒子の質量の下限はおよそ 25〜30 GeV の範囲になる。

もちろん，弱い相互作用の重い量子（その他の性質はすぐ議論する）を直接に創り出すことも，それが存在すれば可能である。然るべき個所で論ずるけれども，GSW 理論はまさにこのような重い量子（W^+，W^- および Z^0 粒子）を含み，その質量は 80〜90 GeV の範囲なのである。しかし，本書を執筆している時点では，このように重い粒子を創ることのできる加速器は存在しない。［このような能力を持つ最初の加速器は CERN のコライダー（ビーム衝突装置）であり，つづいて LEP がこの目的に最適であろう。］したがって，現在の実験は，この尺度ではすべて“低エネルギー”実験である。だからこそ，実験は直接に GSW 理論に導く，とは言えないのである。理論は 1981，2 年までに達成されたエネルギー領域では，実質的に“点状”に見えるのである。*

しかし，4 フェルミオン相互作用の結合の型については（おそらく実効的な範囲にすぎぬであろうが），多くのことが知られている。Fermi のもともとの理論では，$n\to p$ 遷移の際放出される荷電レプトンの対は，電磁遷移の際放出される光子にあたるものとみなされた。この類推が“弱いベクトル・カレント”の着想になったのである。$n\to p$ 遷移は弱いカレントのハドロン行列要素 $\langle p|J_\mu|n\rangle$ で記述され $e^-\bar{\nu}_e$ 対は弱いカレントのレプトン行列要素 $\langle e^-\bar{\nu}_e\,|\,j_\mu\,|\,0\rangle$ で記述される。すると行列要素はこれら 2 つのカレントの Lorentz 不変な積に比例し，これがいわゆる“流れ積”相互作用である。Fermi の論文が出てから 20 年以上もたって，これら荷電カレントの行列要素は実はベクトル型であること，しかし，純粋なベクトル型ではなくて，観測されたパリテイ非保存の効果をとりいれたベクトルと軸性ベクトルの混合，有名な“V–A”相互作用であることが確立されたのであった。中性カレントの相互作用もベクトルの性格を持ち，パリテイを保持しないが，荷電カレントとまったく同一の V–A 構造ではないことが知られている。

湯川の物理像をとりいれると，電磁場との類推がずっとよくなることに注意したい。レプトン対ではなく，伝達量子 $W^{\pm}$ および Z^0 が光子に対応する粒子となり，相互作用がベクトルの性格を持つことは，光子と同様にこれらの粒子がスピン 1 を持つことを意味する。

*1983 年，CERN の 2 つのグループが $W^{\pm}$ および Z^0 粒子の実験的発見を報じた。$W^{\pm}$ 粒子については Arnison *et al*,（1983 a）; Banner *et al*,（1983），Z^0 粒子については，Arnison *et al*,（1983 b）; Bagnaia *et al*,（1983）を見よ。

実験によって，いろいろな遷移行列要素の強さ，あるいは湯川の物理像によれば結合の強さを決定することができる。先験的には非常に多くの独立な強さのパラメターが存在する可能性があるが，極めて顕著なある特徴が見えてきたのであった。まず，荷電カレント（以下 CC と略す）の結合を考えよう。純レプトン的な CC 相互作用はすべて反応 $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ の流れ積に表われる強さと同じ共通の強さを持つように見える。ハドロンの CC 相互作用に関しては，クォーク・フレイバーの Cabibbo 混合およびその一般化による修正を行った上で，すべてのクォーク間の弱い相互作用を支配する同じ普遍的な強さが現われる。(§7・5，§7・6 を参照)。最後に，中性カレントの過程に対する現在のデータは，中性カレントはすべてもう1つの余分なパラメターで記述できることを示している。

レプトンのみならず，クォークに対しても，“結合の普遍性”という著しい特徴があることは，何か強力な基本的対称性と，それに関連した保存則が存在することを明らかに意味する。初期から験証されていたこのような規則性は，Feynman と Gell-Mann（1958）によって，荷電ベクトル・カレントは電磁カレントと同様に保存されるからだ，と解釈された。これについては §8・2 で論ずる。これらの保存するカレントには“弱い荷量”が付随し，Feynman と Gell-Mann は，これらが $SU(2)$対称群のアイソスピンを上げ下げする演算子に比例すると解釈した。結合の普遍性はまた，ゲージ理論（§3・3 で説明する）の特徴とも考えられる。現われてはいるがとらえどころのない，弱い相互作用と電磁相互作用の類似点を理解する方式をめぐって，いくつもの試みがなされたのであった。$SU(2)\times U(1)$ゲージの構造を示唆したのは Glashow（1961）であった。この構造は，現在，電・弱現象の対称性を正しく記述しているように思われる。もうひとつ理論的な障碍になったのは，どのようにして弱いベクトル・ボソンが，光子と同様ゲージ場の量子でありながら質量を獲得するのか，という問題であった。Weinberg（1967）と Salam（1968）のモデルが仮定したように，“隠れた”ゲージ不変性という現象がこの二律背反を解決したのであった。この方式の低エネルギー領域の形は，Glashow のゲージ群を用いる“カレント積”となり，中性カレントの相互作用は，まさに荷電カレントの相互作用ともうひとつのパラメター θ_W によって決定されてしまうのである（第7章で論ずる)。

たとえ低エネルギー領域の形式であっても，GSW 理論を詳しく実験的に精

密な吟味にかけることは，今もなお続けられている。ここではこれ以上触れないことにしよう。あまり遠くない将来に，中間ベクトル・ボソンとその結合を含む完全な高エネルギー領域の構造が，解明され始めるはずである。それまでに，理論それ自身の独立な動機が，経験事実に頼らない議論から与えられるであろう。それについて考えてみよう。

1・2　理論上の動機

基本相互作用に関する現代の理論は，然るべき一般的枠組みが相対論的場の量子論（次章以下に略述する）のラグランジアン形式で与えられることを容認している。この形式の諸理論の主な難点は，最低次の近似を超えて計算を続けるとき，紫外発散をほとんど避けることができない点である（§8・1をみよ）。このような無限大は，当時発展途上のQEDにおいて，始めてOppenheimer（1930）とWaller（1930 a，1930 b）によって認識された。その後ほぼ20年も経て，Feynman, Schwinger，朝永およびDysonは，それぞれ独立な一連の論文（Schwinger，1958に集められている）において，いかにしてQEDのすべての無限大が消去されうるかを示したのであった。観測にかかる有限な電子の質量や電荷は，摂動論を定義するもとのラグランジアンに現われるパラメター m や e ではなくて，仮想的な光子や e^+e^- 対のすべての高次の効果によって補正された m や e の“くりこまれた（再規格された）”量であると解釈されたのであった。これら2つのパラメターを実験から採れば，多くの予言と実験との驚くべき一致が得られ，今でもまだ得られ続けているのである。くりこみ操作の大略については§8・1で述べる。

ある限られた種類の場の理論だけがくりこみ可能であることがまもなく判明した。くりこみ可能な理論では，実験から有限個のパラメターを採用すると，すべての予言が有限な結果として得られるのであった。しかしそのほかの“くりこみ不可能な”理論では，これができない。換言すれば，無限個のパラメターを採用しなくてはならないのである。特に，弱い相互作用のもともとのFermi理論では，4フェルミオン相互作用はくりこみ不能であることがわかった。こうして，くりこみ可能性は，いろいろな理論を，有限個のパラメターを用いて摂動論で有限な計算結果を出し得る種類の理論に属するように制限する有力な原理となったのである。

湯川の物理像によれば，電磁相互作用のように，強い相互作用も弱い相互作

用も，ベクトル量子によって伝達されると考えて然るべき経験的な理由がある。このようなベクトル理論のくりこみ可能性は，特に錯綜していることがわかってきた。QED の場合は，理論の“ゲージ不変性”がくりこみ可能性の証明にとって決定的な役割を果たす（§8・2参照）。QCD では，前節の議論に従えば，くりこみ可能性の要請は漸近自由性の要請でおきかえることができる。データの見地から示唆される $SU(3)_C$ 対称性は，もし理論がくりこみ可能であるならば，一般化された非可換ゲージ対称性に転化されなくてはならない。（第3章参照）。そのとき，漸近自由性は予言となる（§8・4を見よ）。

QED でも QCD でも，ゲージ不変性はベクトル量子の質量ゼロの性質に結びついている。弱い相互作用では事情はさらに微妙である。現象論は質量を持つ荷電ベクトル型の理論に導くことはすでに見た。さて，このような理論は，ふつうはゲージ不変な対称性を示さない（§3・2を見よ）し，また§5・2に示すようにくりこみ可能でもない。しかし，まことに注目すべきことには，§5・2で示すように，質量を持つベクトル粒子のある特別なタイプの理論は，くりこみ可能なのである。これが“隠れた”対称性を持つ理論である。これは決定的に重要な概念であって，第5章・第6章で説明しよう。この理念の弱い相互作用への応用は第7章で議論する。

くりこみ可能性は，理論の構成に際して強力な指導原理になる。一方，われわれは興味ある理論はすべてゲージ理論であるという見解に達したように思われるが，しかし，ゲージ理論はくりこみ可能な場の理論を尽してはいない。いまだに，なぜゲージ理論なのか，という疑問は答えられていない。ひとつの手がかりは，これらの理論で果たす対称性の本質的な役割である。

相互作用の形までも決めてしまう強力な対称性の原理を見いだすという着想は，Einstein と Minkowski の電磁理論にまで遡ることができるようである。Maxwell 方程式は，実験的に確立された電磁気の法則の合成として発見され，方程式はある対称性——Lorentz 不変性を表わしていた。Minkowski は，特殊相対論のテンソル解析を展開し，テンソル解析はある理論が Lorentz 変換のもとで不変か否かを解析する数学的な手段と概念を与えた。すべての慣性系は同等であるという対称性の原理は，物理法則が Lorentz 変換のもとで共変的であるという数学的要請となり，これはただちに Minkowski のテンソル解析を用いて証明されるのである。もちろんこの要請は，限定能力はあるがまだ相互作用の形を決めるには至らない。特殊相対論の不変群を拡張するにあたって，

Einsteinはより一般的な座標変換を研究するようになった。一般相対論的共変性の要請は相等原理と結びついて，実際に特定の相互作用を持つ新しい理論，すなわち重力理論を導いたのであった。しかし，場の方程式は共変性の要請のみでは，一意に導かれないことに注意しなくてはならない。

さて，思考の順序を逆にすれば，相互作用の理論に対するこの意味深長な新しい接近の仕方を，次のように解釈しなおすことができる。重力場の存在は，非常に広い範囲の一般座標変換を，対称群として機能することを"許す"ものである。とすれば，電磁場も，その存在によってはじめて可能になるある対称性によって"説明"されるではないか，と問うことも自然である。長期にわたって，Einsteinは一般相対論の変換群を拡張し，電磁力を重力とともに，"統一"理論の中に含めようと努力してきたが成功しなかった。のちに"ゲージ不変性"として知られるようになった特定の拡張を導入したのはWeylであった。彼はスケール変換（彼の用いたドイツ語の直訳は"尺度不変"とするのがふさわしい）を不変性のひとつの候補と考え，4元ベクトル・ポテンシャルA_μをこの不変性を可能にする場と解釈しようとしたのであった。

Weylの考えたスケール変換は時空座標に関係し，時空間の各点で異なる。局所的な時空点に関係するこの種の変換と，すべての時空点で共通な変換の間には，重要な相違があることを明らかにしなくてはならない。前者は局所的変換，後者は大局的変換と呼ばれる。相互作用を"生みだす"ために強力と思われるのは局所的不変性の要請である。Einsteinの重力理論もこのことを例示している。重力理論は，Lorentz座標変換（これは変換行列が時空座標によらない大局的変換である）を，局所的な時空点の座標による任意の変換に一般化したときに出てくるからである（内山，1956）。

Weylの着想はその元来の形では成功しなかったが，のちに量子力学が出現してから異なる形で再生した。Fock（1927），London（1927）およびWeyl自身（1927）によって，量子電磁力学は実は新しい局所的対称性に関連していることが認識された。電子の波動関数は時空間の1点ごとに変化する位相の変更を受けるのである。波動関数にこの変換を行うとき，電磁ポテンシャルA_μにもこれに応じたゲージ変換を行うと不変性が回復されるのである（場の理論の枠内で第3章で論ずる）。Weylのもとの着想では，尺度の変換であったものが位相の変換になったが，この対称性に関連した"ゲージ（規格）変換"とか"ゲージ（規格）不変"という言葉はそのまま残った。ゲージ理論の歴史に

ついて詳しい総合報告をYang（1977）が与えている。

量子電磁力学に現われる簡単な局所的位相不変性は，今日$U(1)$ゲージ対称性と呼ばれている。それは位相の変化が1次元のユニタリー行列をかけることとみなしうるからである。複数個の波動関数（あるいは場）が同時に変換するより複雑なユニタリー変換も，もちろん可能である。たとえば$SU(2)$や$SU(3)$変換は，ユニタリー行列が多重子に働くのであるが，これも位相の変換と考えることができる。ただしこのとき“位相”は行列量である。行列は一般に交換しないから，これらの変換は非可換（非Abel的）対称性と呼ばれる。Heisenbergの創始にかかる$SU(2)$対称性や，$SU(3)$あるいはより大きな“フレイバー”群への拡張は，大局的非可換対称性であったが，それだけでは，新しい力学理論は出てこなかった。しかし，その非凡な論文において，Yang & Mills（1954）は，このような対称性を局所的に考察し，非可換ゲージ理論を創始したのであった（第3章参照）。これは，QEDという可換$U(1)$ゲージ理論の美しい一般化にあたっている。

Yang & Millsの着想を正しく応用することは，あとの章で論ずるように，ただちに行われたわけでもなく，また決して容易でもなかった。特に，最近のゲージ理論の決定的な内容は，“隠れた”ゲージ不変性（第6章を見よ）の諸現象であって，これは1960年代はじめに理解されるに至ったのであった。WeinbergとSalamによる隠れた対称性の応用は，既述のように，弱い相互作用のくりこみ可能な理論に結実し，また，一方の量子が質量を持たず，他方の量子が質量を持つという事実にもかかわらず，電磁力と弱い力を統一的に理解することを可能にしたのであった。これもまたゲージ理論であるQCDとともに，3つの力はすべて単一の大きな局所群の中に統一できるのではあるまいか，という期待が強くなっている。この群の構造は$SU(2)\times U(1)$構造を内蔵し，電磁相互作用と弱い相互作用を部分的に統合する。§7・6でこの理論について簡単に言及しよう。このような統合化（前節に述べたいろいろな類似性を理解する終極の形と期待される）はそれ自身，QEDの大成功をふまえて，その他の相互作用へもゲージ理論が適用できるという議論であった。重力ではどうであろうか。基本的な力をすべて最終的に統一するというEinsteinの壮大な洞察は，再び熱心に追求されているが，今度は，他の3つの力との統一化を探しているのは重力のほうなのである。しかしながら，“超大統一理論”をめざすこれらの試みはいまだに未熟であって，本書の中に含めるのは時期尚早である。

“対称性”は，すべてのゲージ理論にとって基本であることは論をまたない。したがって，場の量子論における対称性の問題から出発することにしよう。

2

場の量子論における対称性　I
——顕在的対称性

本章の目的は，ゲージ場の理論を理解する上で特に重要な対称性について，簡単な理念と結果をとりまとめることである。ここでは，Lagrange 型式の場の理論の初等的知識を仮定し，Bjorken & Drell（1965）の慣用測度を用いることにする。“隠れた”対称性の現象については第6章まで伏せておく。

2・1　Euler–Lagrange の方程式，正準量子化

ラグランジアン密度$\mathscr{L}$で記述される系を考える。$\mathscr{L}$は場の量とその導関数で表わされ，時空間の座標は陽に含まないものとする。作用 I は$\mathscr{L}$の4次元積分

$$I=\int \mathrm{d}^4 x \mathcal{L} \tag{2.1}$$

である。積分は全時空間にわたって行い，部分積分を行って表面項が無視できるように場の量は無限遠方で十分早く0になるものと仮定する。もし作用原理——I が場の変分に対して定常的になること——から運動方程式（場の方程式）が導かれ，かつ$\mathscr{L}$ が場の量およびその導関数の関数として Lorentz 不変であるならば，運動方程式の Lorentz 共変性が保証される。

簡単な例として，単一のスカラー場 $\phi(x)$をとり，$\mathscr{L}$ が $\phi(x)$と $\partial_\mu \phi(x)$の関数である場合からはじめよう。無限小の変分 $\delta\phi(x)$のもとに，I は δI だけ変化する。

$$\delta I=\int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta \phi(x)+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \delta(\partial_\mu \phi(x))\right\} \tag{2.2}$$

部分積分を行い，関係式

$$\delta(\partial_\mu \phi(x))=\partial_\mu(\delta \phi(x)) \tag{2.3}$$

を用いれば，

$$\delta I=\int d^4x\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right\}\delta\phi(x) \tag{2.4}$$

を得る。任意の変分 $\delta\phi(x)$ に対して I の変分 δI が 0 になることを要請すれば，Euler–Lagrange の方程式

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi(x)}=0 \tag{2.5}$$

が出る。たとえば，$\mathscr{L}$ が簡単な形

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}[\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x)-m^2\phi^2(x)] \tag{2.6}$$

をとれば，式（2・5）は Klein–Gordon の方程式

$$(\Box+m^2)\phi(x)=0 \tag{2.7}$$

になる。これは質量 m を持つ自由なスカラー場の場の方程式である。以上の論述は，いろいろな Lorentz 変換性（スピノル，ベクトルその他）を持つ複数個の場 $\phi_r(x)$の場合に，そのまま拡張することができる。

ここまでは，場の量子化について何も言っていなかった。最近では，量子化について２つの方法が用いられている。ひとつは“正準”方式で，他は経路積分の方法である。後者は最近著しい発達をとげ，素粒子論の研究者にとっては必須の知識になっている。これは量子力学・場の理論・統計力学のモデルを統一的に取扱う方法を与え，さらに，束縛（拘束）条件のある系の量子化という難問題の処理に特に適しているように思われる。のちに見るように，ゲージ諸理論はまさにこの類いの問題なのである。しかしながら，本書の目的はゲージ諸理論の“形式的でない”入門を提示することだから，伝統的な正準方式に従うことにする。さらに，正準量子化にまつわるいろいろな難点や微妙な点については触れないことにする。この欠陥を埋めてくれるいくつかのすぐれた教科書が今は出版されているから，安んじてこの便法に従うことができる。特に，Itzykson & Zuber（1980，双方の量子化の方法が解説してある）および Ramond（1981，初めから経路積分の方法で一貫している）の書物は有用である。

正準量子化の方法は，質点系の古典力学から粒子系の量子力学を導くときに用いた方法を，無限大の自由度（場）を持つ系に一般化した，ある“もっともらしい拡張”にほかならない。古典力学の観測量は演算子で，Poisson 括弧式は交換子を i で割ったもので置換える方法である。ラグランジアン密度$\mathscr{L}$は，場の変数 $\phi_r(x)$に正準共役な“運動量” $\pi_r(x)$

$$\pi_r(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial[\partial_0 \phi_r(\mathbf{x}, t)]} \tag{2.8}$$

を定義するのに用いられる。ここで$\mathscr{L}$はϕおよび$\partial_\mu\phi$にだけよることを明示し，量子化は一定の時刻で行うことを明らかにするため，時間変数を陽に書き込んである。系を量子化するには，古典的な場の量を，同時刻の交換関係

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = \mathrm{i}\delta_{rs}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{2.9}$$

$$[\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0 \tag{2.10}$$

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = 0 \tag{2.11}$$

をみたす演算子で置換える。フェルミオン場に対しては，交換子の代わりに反交換子を用いる。

2・2　回転不変性

時空座標の回転に対する不変性という，なじみ深い実例によっていろいろ思い出しながら，対称性の議論を始めることにしよう。本書のほかの部分で取扱うのは“内部”対称性であって時空対称性ではないが，この２種類の対称性は形式的には同じように取扱われる。さらに，ゲージ場の内部対称性はいずれにせよ実際時空座標に依存し，§１・２で示唆したように力学の“幾何学化”に結びつくかもしれないのである。

無限小回転

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \epsilon \times \mathbf{x} \tag{2.12}$$

を考えれば十分である。ここでは，回転を３つのパラメター$\boldsymbol{\varepsilon}$で表わしている。しかし簡単のため，x_3軸のまわりの回転という特別な場合を主として論じよう。

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - \epsilon x_2 \\ x'_2 &= x_2 + \epsilon x_1 \end{aligned} \tag{2.13}$$

このような回転のもとで，ラグランジアン$\mathscr{L}$（正しくはラグランジアン密度というべきであるが，誤解はないであろう）は不変であると仮定される。不変性あるいは対称性から，保存則が出てくる。この場合は角運動量の保存則である。$\mathscr{L}$が変換（2・12）のもとで不変であることは，

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}') = \mathcal{L}(\mathbf{x}) \tag{2.14}$$

で表わされる。$\mathscr{L}$は座標 $\mathbf{x}$ を陽に含む関数ではないが，ϕ（$\mathbf{x}$），$\partial_\mu\phi$（$\mathbf{x}$）を

通じてのみ $\mathbf{x}$ を含む*。場の量とその導関数は変換(2・12)〔あるいは(2・13)〕によって変化する。その変化は ϕ のLorentz変換性，一般には系に存在するすべての場 ϕ_r に依存する。いまスカラー場の場合に話を限るとしよう。ϕ はただ1つの成分を持ち，定義により

$$\phi'(\mathbf{x}') = \phi(\mathbf{x}) \tag{2.15}$$

が成立つ。この式は，座標の変換により ϕ は新しい関数 ϕ' に変わるが，変換された座標 $\mathbf{x}'$ で勘定した ϕ' の値は，もとの座標 $\mathbf{x}$ で勘定した ϕ の値に等しい，ということを示す。このようにして，2つの座標系 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'$ を矛盾なく用いることができるのである。式（2・14）の左辺の $\mathscr{L}$ にダッシュがついていないことに注意してほしい。$\mathscr{L}$ は回転のもとで不変な関数ととったから，その形は変わらないのである。

新しい関数 ϕ' の形を式（2・15）から次のように求めることができる。

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{x}) \tag{2.16}$$

$$= \phi(x_1 + \epsilon x_2, x_2 - \epsilon x_1, x_3) \tag{2.17}$$

ただし，式（2・17）は特別な変換（2・13）に対応する。式（2・17）をTaylor展開すれば

$$\phi'(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - \mathrm{i}\epsilon L^3 \phi \tag{2.18}$$

を得る。ここで L^3 はいつもの演算子

$$L^3 = -\mathrm{i}x_1\partial^2 + \mathrm{i}x_2\partial^1 \tag{2.19}$$

$$= (\mathbf{x} \times \mathbf{p})^3 \tag{2.20}$$

すなわち角運動量の量子力学的演算子の第3成分である。ϕ が複数個のLorentz成分を持つときは，然るべきスピン行列が L^3 につけ加わることになる。式（2・18）は変換（2・13）に対する ϕ の変分である。

$$\delta\phi = -\mathrm{i}\epsilon L^3 \phi \tag{2.21}$$

さて ϕ が式（2・21）で変わるとき，$\mathscr{L}$（ϕ，$\partial_\mu\phi$）の変分を計算することができる。この変分は，しかし，式（2・14）によってゼロである。

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \tag{2.22}$$

関係式　$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$　と Lagrange の運動方程式（2・5）を用いれば，

* 座標の平行移動のもとでの $\mathscr{L}$ の不変性から，実はもうひとつの保存則，エネルギーおよび運動量の保存則を導くことができる。しかし以下の議論に関する限り，この不変性は回転不変性ほど有用ではないから無駄な寄道を避けるとしよう。

式（2・22）を

$$0=\epsilon\partial_\mu M^{3\mu} \tag{2.23}$$

$$M^{3\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\cdot -\mathrm{i}L^3\phi \tag{2.24}$$

と書くことができる。これはすべての ϵ について成立しなくてはならないから，ベクトル量 $M^{3\mu}$ は発散を持たない。

$$\partial_\mu M^{3\mu}=0 \tag{2.25}$$

この式は，電磁カレント j^μ の保存則

$$\partial_\mu j^\mu=0 \tag{2.26}$$

に似た微分型の保存則の形を持っている。式（2・26）が j^0 の空間積分である電荷 Q

$$Q=\int j^0\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.27}$$

が時間によらない（すなわち運動の恒量である）ことを意味するように，式（2・25）は量

$$M^3=\int M^{30}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.28}$$

が保存することを意味する。詳しく書けば

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M^3}{\mathrm{d}t}&=\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\partial_0 M^{30}(\mathbf{x},t)\\&=-\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\partial_i M^{3i}(\mathbf{x},t)\end{aligned} \tag{2.29}$$

だから，体積積分は表面積分で表わされ，場の量が無限遠で十分早く減衰すれば，表面積分はゼロになる。式（2・8）により，M^3 はまた

$$M^3=\int -\mathrm{i}\pi L^3\phi\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.30}$$

と書くことができ，明らかにベクトル関係式

$$\mathbf{M}=\int -\mathrm{i}\pi\mathbf{L}\phi\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.31}$$

に一般化することができる。

したがって，$\mathscr{L}$ の回転に対する不変性は３つの量 $\mathbf{M}$ の保存，すなわち場に

存在する角運動量の保存に結びついている．これは Noether の定理の特別な場合である．もし $\mathscr{L}$ がある連続な1パラメター変換のもとで不変であれば，微分保存則をみたす4次元ベクトルの“カレント”が存在し，その時間成分（ゼロ成分）の空間積分は保存される“荷量（チャージ）”を与える。これを Noether の定理という。この場合，3つのパラメター $\boldsymbol{\varepsilon}$ に対応して3個の保存量が存在する。

$\mathscr{L}$ の不変性に対応する“荷量”は，保存量ということのほかに，問題になっている無限小変換を生成するという基本的な性質をもつ。古典場の理論では，荷量と場の量の Poisson 括弧式が，変換に伴う場の量の変化（を無限小パラメターで割ったもの）になることを意味する。量子場の理論では，荷量（もちろん，場の量の関数である演算子である）は，場の量（演算子）および状態の Hilbert 空間に働くユニタリー変換の生成演算子（ジェネレーター）であると考えられる。いまの回転の場合は，式（2・13）の回転であれば

$$\phi' = U\phi U^{-1} \tag{2.32}$$

$$U = 1 + \mathrm{i}\epsilon M^3 \tag{2.33}$$

であり，有限の回転に対しては

$$U = \exp(\mathrm{i}\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}) \tag{2.34}$$

である。式（2・32），（2・33），（2・18）から

$$[M^3, \phi] = -L^3\phi \tag{2.35}$$

あるいは

$$[\mathrm{i}\epsilon M^3, \phi] = \delta\phi \tag{2.36}$$

が成立し，M^3 は明らかに変換 $\boldsymbol{\phi}\rightarrow\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi}$ の生成演算子である。しかしながら，M^3 はすでに式（2・30）の形をもつように決定されており，したがって，いったん正準交換関係が仮定された以上，M^3 と $\boldsymbol{\phi}$ の交換関係もすでに決定されているはずである。そうであれば，無矛盾性の問題だけが残る。この場合（実はわれわれの取扱うすべての場合に），すべてうまくゆく。実際に M^3 は時間によらないことは既知であるから，積分の中の時刻を t' ととり，

$$\begin{aligned}[M^3, \phi(\mathbf{x}', t')] &= \left[\int -\mathrm{i}\pi(\mathbf{x}, t') L^3 \phi(\mathbf{x}, t')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}', t')\right] \\ &= -\mathrm{i}\int [\pi(\mathbf{x}, t'), \phi(\mathbf{x}', t')] L^3 \phi(\mathbf{x}, t')\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$= -\mathrm{i}\int \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')L^3\phi(\mathbf{x},t')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \qquad [\text{式(2.9)を用いる}]$$

$$= -L^3\phi(\mathbf{x}',t')$$

のように予期した結果が得られる。

対称性はいつもユニタリー変換の形で採り入れられるとは限らないということを特に強調しておく。実際，ほかの可能性があって，たとえば，電荷の演算子（生成演算子）は規格化可能な状態を創り出しはしないのである。したがって，この対称性は物理的状態に対してユニタリー的に導入するというわけにはいかない。これは“隠れた”対称性と言われる場合である。素粒子物理学では現在，隠れた対称性は，ユニタリー変換で導入される普通の場合，いわゆる“顕われた”対称性にくらべて，勝るとも劣らぬ重要性を持っている。この２つの状況は非常に異なっており，“隠れた”対称性は特にゲージ諸理論に関しては，なかなか直観的に把握しにくい。隠れた対称性については第６章まで議論をさし控えておく。それまでは，ユニタリー変換で表現しうる場合だけを論ずることにしよう。

もうひとつ，ここで注意しておかなくてはならないことがある。場の量子論では，一般に紫外発散が起こる。くりこみ可能な理論ではこれは処理できる。しかし，発散が現われると，古典的段階では明らかなラグランジアンの対称性に対応する局所的保存則が成立しないことがある。このとき，“特異性（異常）”があるという。第８章ですこし特異性について論ずる。

次の節で，顕われた内部対称性について簡単な解説を行う。

2・3　内部対称性

特定のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2) - \tfrac{1}{2}m^2({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2) \tag{2.38}$$

を考えよう。ϕ_1，ϕ_2 は同じ質量 m をもつエルミート的なスカラー場である。直観的に，ϕ_1，ϕ_2 を“座標”とみなせば，$\mathscr{L}$ は“第３軸”のまわりの“回転”に対して不変であることが知られるであろう。実際，$\mathscr{L}$ は変換

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 \to \phi_1' &= \phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta \\ \phi_2 \to \phi_2' &= \phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

あるいは無限小変換として

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 \to \phi_1' = \phi_1 - \epsilon\phi_2 \\ \phi_2 \to \phi_2' = \phi_2 + \epsilon\phi_1\end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

のもとで不変に保たれることをただちに証明できる。式（2・40）を意識的に式（2・21）に似せて

$$\delta\phi_r \equiv \phi_r' - \phi_r = -\mathrm{i}\epsilon T_{rs}{}^3\phi_s \tag{2.41}$$

と書こう。ここに，$T_{12}{}^3 = -\mathrm{i} = T_{21}{}^3$ である。$\mathscr{L}$ は変換（2・40）で不変だから

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\,\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}\,\partial^\mu(\delta\phi_r) \tag{2.42}$$

$$= \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right)\right]\cdot -\mathrm{i}\epsilon T_{rs}{}^3\phi_s + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\cdot -\mathrm{i}\epsilon T_{rs}{}^3\partial_\mu\phi_s$$

$$= \epsilon\,\partial_\mu j^{3\mu} \tag{2.43}$$

が成立つ。ただしカレント $j^{3\mu}$ は

$$j^{3\mu} = -\mathrm{i}T_{rs}{}^3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\,\phi_s = \phi_1\partial^\mu\phi_2 - \phi_2\partial^\mu\phi_1 \tag{2.44}$$

である。式（2・43）で ϵ は任意であるから，カレント j^μ に対する微分保存則

$$\partial_\mu j^{3\mu} = 0 \tag{2.45}$$

が導かれる。これに対応する荷量は

$$Q^3 = \int j^{30}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = -\mathrm{i}T_{rs}{}^3\int \pi_r\phi_s\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.46}$$

$$= \int(\phi_1\dot{\phi}_2 - \phi_2\dot{\phi}_1)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.47}$$

である。交換子はすぐ計算できて

$$[Q^3, \phi_r(x)] = -\mathrm{i}T_{st}{}^3\left[\int\pi_s(x')\phi_t(x')\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}', \phi_r(x)\right]$$

$$= -\mathrm{i}T_{st}{}^3\cdot -\mathrm{i}\delta_{rs}\phi_t(x)$$

$$= -T_{rt}{}^3\phi_t(x) \tag{2.48}$$

となる。ϕ_1，ϕ_2 の変換をユニタリー演算子 U で $\phi_1' = U\phi_1 U^{-1}$ のように表わせば

$$U = 1 + \mathrm{i}\epsilon R, \tag{2.49}$$

のように書くことができ，無限小変換（2・40）に対して生成演算子 R はエルミート的である。このとき変換（2・40）は

$$\left.\begin{aligned}[R, \phi_1] &= \mathrm{i}\phi_2 \\ [R, \phi_2] &= -\mathrm{i}\phi_1\end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

となり，式（2・48）と似せて

$$[R, \phi_r] = -T_{rt}{}^3 \phi_t \tag{2.51}$$

と書くことができる。ここにおいて，荷量 Q^3 は変換の生成演算子であると同定することができる。

複素場

$$\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) \tag{2.52}$$

およびそのエルミート共役

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \mathrm{i}\phi_2) \tag{2.53}$$

を導入すると式を綺麗な形にまとめることができる。ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \tag{2.54}$$

である。式（2・40）は

$$\phi' = (1 - \mathrm{i}\epsilon)\phi \tag{2.55}$$

となり，$j^{3\mu}$ は

$$j^{3\mu} = \mathrm{i}(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^\dagger \phi) \tag{2.56}$$

Q^3 は

$$Q^3 = \mathrm{i}\int (\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi)\, \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{2.57}$$

で表わされる。交換関係（2・48）は

$$[Q^3, \phi] = -\phi \tag{2.58}$$

$$[Q^3, \phi^\dagger] = \phi^\dagger \tag{2.59}$$

と書ける。

慣用の規準モードへの展開

$$\phi_r = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{[(2\pi)^3 2\omega]^{1/2}} [a_r(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a_r{}^\dagger(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{2.60}$$

を行えば，式の物理的解釈を与えることができる。ここに，$\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$ である。交換関係（2・9）（2・10）（2・11）は

$$[a_r(k), a_s{}^\dagger(k')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{2.61}$$

となり，$[a_r,\ a_s]$ および $[a_r{}^\dagger,\ a_s{}^\dagger]$ はゼロである。ハミルトニアンは独立な振

動子の和

$$H=\sum_{r}\int d^3\mathbf{k}\omega a_r{}^{\dagger}(k)a_r(k) \tag{2.62}$$

となる。ただし

$$a_r(k)|0\rangle=0, \langle 0|0\rangle=1 \tag{2.63}$$

で定義される真空 |0>の無限大の零点エネルギーは無視した。$[\mathrm{H}, a_r{}^{\dagger}(k)]=\omega a_r{}^{\dagger}(k)$ であるから，ただちに

$$H(a_r{}^{\dagger}(k)|0\rangle)=\omega(a_r{}^{\dagger}(k)|0\rangle) \tag{2.64}$$

が成立つことがわかり，演算子 $a_r{}^{\dagger}(k)$ は，真空からエネルギー ω（さらに一般的に言えば運動量 k）の状態を創り出すことを表わしている。これに応じて式（2・52),（2・53）の ϕ, $\phi^{\dagger}$ を

$$\phi=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{[(2\pi)^3 2\omega]^{1/2}}[a_+(k)e^{-ik\cdot x}+a_-{}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x}] \tag{2.65}$$

$$\phi^{\dagger}=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{[(2\pi)^3 2\omega]^{1/2}}[a_+{}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x}+a_-(k)e^{-ik\cdot x}] \tag{2.66}$$

と展開すれば

$$a_+{}^{\dagger}(k)=[a_1{}^{\dagger}(k)+ia_2{}^{\dagger}(k)]/\sqrt{2} \tag{2.67}$$

$$a_-{}^{\dagger}(k)=[a_1{}^{\dagger}(k)-ia_2{}^{\dagger}(k)]/\sqrt{2} \tag{2.68}$$

である。これから

$$[a_+(k), a_+{}^{\dagger}(k')]=[a_-(k), a_-{}^{\dagger}(k')]=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{2.69}$$

および $a_{\pm}$ を含むすべての交換子はゼロになることがわかる。これらの演算子を用いて，荷量の演算子は

$$Q^3=\int d^3\mathbf{k}[a_+{}^{\dagger}(k)a_+(k)-a_-{}^{\dagger}(k)a_-(k)] \tag{2.70}$$

と表わされる。明らかに

$$Q^3|0\rangle=0 \tag{2.71}$$

が成立ち，また，$[Q^3, a_+{}^{\dagger}(k)]=a_+{}^{\dagger}(k)$ であるから，

$$Q^3(a_+{}^{\dagger}(k)|0\rangle)=a_+{}^{\dagger}(k)|0\rangle \tag{2.72}$$

が式（2・64）と同じようにして得られる。したがって，演算子 $a_+{}^{\dagger}(k)$ は Q^3 の固有値 +1 の状態を創る。同じようにして演算子 $a_-{}^{+}(k)$ は固有値 −1 の状態を創る。これに対応する消滅演算子は $a_+(k)$ および $a_-(k)$ である。$a^{\dagger}a$ は個数演算子であるから，任意の状態にあるそれぞれの“＋”粒子に対しては Q^3

は＋1と数え，それぞれの“－”粒子に対しては－1と数える。さらに，交換関係

$$[Q^3, H] = 0 \tag{2.73}$$

が容易に検証できるから，Q^3 は運動の恒量である。

もちろん，Q^3 の固有値を電荷（電磁荷量）と結びつけて物理的解釈を与えるまえに，電磁場を導入しなくてはならない。これは次の章で行う。

以上の事がらは，いろいろな方向に一般化することができる。たとえば，同じ質量を持つ第3のスカラー場を含めて考えることができよう。このラグランジアンは，ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の空間の完全な“3次元回転”

$$\boldsymbol{\phi}' = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\phi} \tag{2.74}$$

に対して不変になる。ここで，$\boldsymbol{\Phi}=(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$に対してベクトル記法を用い，3個の無限小パラメター $\boldsymbol{\varepsilon}$ を導入した。変換（2・74）は

$$\delta\phi_r' \equiv \phi_r' - \phi_r = -\mathrm{i}\epsilon_a T_{rs}{}^a \phi_s \tag{2.75}$$

と書くことができる。ただし，和は $a=1, 2, 3$ および $s=1, 2, 3$ について行い

$$T_{rs}{}^a = -\mathrm{i}\epsilon_{ars} \tag{2.76}$$

を用いた。今度は発散を持たない3個のカレント（$a=1, 2, 3$）

$$j^{a\mu}(x) = -\mathrm{i} T_{rs}{}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \phi_s \tag{2.77}$$

$$= (\boldsymbol{\phi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\phi})^a \tag{2.78}$$

と3個の荷量

$$Q^a = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, j^{a0}$$

$$= \int \mathrm{d}^3\mathbf{x} (\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{\pi})^a \tag{2.79}$$

がある。荷量は保存し，

$$\dot{Q}^a = [Q^a, H]/\mathrm{i} = 0 \tag{2.80}$$

かつ変換（2・74）を

$$[Q^a, \phi_r] = \mathrm{i}\epsilon_{ars}\phi_s \tag{2.81}$$

によって生成する。［式（2・48），（2・35）を参照せよ。］

式（2・79）は，普通の3次元空間の回転を生成する角運動量演算子 $\mathbf{L}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}$ を，“場の空間”で類推をとったものと考えられる。実際，場の回転を生

成する荷量演算子 Q^a は，**L** と同じ交換関係をみたす。再び式（2・79）を用いて

$$[Q^a, Q^b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}Q^c \tag{2.82}$$

を証明することができる。この結果は，場の変換に現われる定数 $T_{rs}{}^a$ を

$$(T^a)_{rs} \equiv T_{rs}{}^a \tag{2.83}$$

によって行列 T^a の要素とみなすとき，それが同じ代数関係をみたす場合に限って成立つ。式（2・83）および（2・76）を用いて容易に

$$[T^a, T^b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}T^c \tag{2.84}$$

が導かれる。

交換関係（2・82）は，群 $SU(2)$ の代数［あるいは群 $SU(2)$ の生成演算子の代数］と呼ばれる。一般に，ラグランジアンがユニタリー対称群に結びついた変換のもとで不変であれば，保存する荷量演算子の1組を定義することができ，この演算子は Lie 代数の生成演算子の場の理論的な表現になっている。荷量が自明でない交換関係に従うこの種の対称性を，非可換（または非 Abel 型）対称性という。これに対して，簡単な1パラメターの位相の変換は，可換（または Abel 型）$U(1)$ 群をつくる。

行列 T^a は代数の行列表現であって，生成演算子と同じ交換関係をみたす。実際，それは特別な表現であって，“正則”表現あるいは“共役”表現と呼ぶ。一般には，代数

$$[Q^\alpha, Q^\beta] = \mathrm{i}c_{\alpha\beta\gamma}Q^\gamma \tag{2.85}$$

をみたす演算子 $Q^\alpha(\alpha = 1, 2, 3 \cdots\cdots, n)$ がたくさんあるはずである。式（2・85）の定数 $c_{\alpha\beta\gamma}$ を群の“構造定数”という。正則表現では，生成演算子は

$$(t^\alpha)_{\beta\gamma} = -\mathrm{i}c_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.86}$$

をみたすような行列 t^α で表わされ，明らかに n 行 n 列の次元を持つ。

この $SU(2)$ の例で，3つの生成演算子と3つの場が現われたことは，偶然の事情による。式（2・81）と式（2・82）を眺めると，荷量と3つの場 ϕ_r との交換関係は，荷量どうしの交換関係とまったく同じ形を持っている。生成演算子と場との交換関係は，場が考えている無限小変換のもとでどう変換するかを記述するものである。一般に式（2・81）の右辺には，場と生成演算子との交換関係をとることによって場のどのような線型結合が生ずるかを表わす定数がでてくるであろう。これらの定数あるいは係数は，場が考えている変換群のもとでどう変換するかを完全に記述する。この場合のように，これらの定数が

群の構造定数であるとき，場は正則表現として変換するという。

もちろん，一般にはほかの表現がいくつも可能である。$SU(2)$ の場合にすべての表現を求める問題は，代数が実は角運動量の演算子の代数であることに注目すれば，よく知られた許容状態やそれに付随する演算子の行列表示を用いることができて，ただちに解くことができる。たとえば，3重子の場 ϕ のかわりに $SU(2)$ のもとで

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}' = (1 - \mathrm{i}\epsilon \cdot \tau/2)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

のように変換する2重子の場 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ を考えることができる。ここでは，正則表現のときに適切であった3行3列の行列が，2重子表現のときに適切な2行2列の行列 $\tau/2$ でおきかえられている。ちょっと目先を変えて，u および d がフェルミオン場（クォーク）であると考えよう。この場合変換（2・87）のもとで不変なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{u}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)u + \bar{d}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)d \tag{2.88}$$

となる。これに関連したカレントは

$$j^{a\mu} = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\tau\psi \tag{2.89}$$

荷量は

$$Q^{a} = \frac{1}{2}\int \psi^{\dagger}\tau^{a}\psi \ \mathrm{d}^{3}\mathbf{x} \tag{2.90}$$

である。ただし，$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ とおいた。フェルミオン場の反交換関係を用いて

$$[Q^{3}, u] = -\tfrac{1}{2}u \tag{2.91}$$

$$[Q^{3}, u^{\dagger}] = \tfrac{1}{2}u^{\dagger} \tag{2.92}$$

を得るから，$u^{\dagger}$ は Q^{3} の固有値 $+\frac{1}{2}$ を持つ場をつくり出す演算子である。また荷量 Q^{a} は，記法の示唆するように，交換関係（2・82）をみたしている。

このほかの一般化も可能である。今までは自由な場しか考察してこなかった。真空・生成および消滅演算子等々による物理的解釈を相互作用をしている場にも与えることができると仮定すれば（Itzykson & Zuber，1980 参照），対称性を保存する相互作用を導入することができる。たとえばラグランジアン

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu}\phi)^{\dagger}(\partial^{\mu}\phi) - \tfrac{1}{2}\mu^{2}\phi^{\dagger}\phi - \tfrac{1}{2}\lambda^{2}(\phi^{\dagger}\phi)^{2} \tag{2.93}$$

を考えよう。ここに ϕ は $SU(2)$ のスピノル

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{\mathrm{u}} \\ \phi_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \tag{2.94}$$

として

$$\delta\phi = -\mathrm{i}\epsilon\cdot\tau/2\,\phi \tag{2.95}$$

のように変換するボソン場である。（このラグランジアンは今後くりかえし考察の対象になる。）式（2・93）は確かに変換（2・95）のもとで不変であり，質量項$-\frac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi$のほかにパラメター$\lambda^2$で表わされる強さを持つ4次の相互作用項を含んでいる。この場合，Noether カレントは

$$j^{a\mu} = \mathrm{i}\left(\phi^\dagger\frac{\tau^a}{2}\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi)^\dagger\frac{\tau^a}{2}\phi\right) \tag{2.96}$$

である。言うまでもなく，このカレントに関連した荷量は再び，式（2・82）をみたす代数である。

この節の最後の例として，

$$\bar{\psi}\tau\psi\cdot\phi \tag{2.97}$$

の形の相互作用に言及しておこう。ここにψはアイソスピノルでϕはアイソベクトルとする。式（2・97）は$SU(2)$アイソスピン変換に対して不変である。ψを核子の2重子$\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}$，$\phi$を中間子場と解釈すれば（ほかのハドロンにも拡張し，またパイオンが擬スカラーであることを考慮した修正を行って），今までの議論はハドロンのアイソスピンの定式化になる。“荷量”はとりもなおさず3つのアイソスピン演算子 **I** である。

すべての場合を通じて，もし対称性をユニタリー的に状態の Hilbert 空間に導入するのであれば，荷量はこの空間に作用するあいまいさのない演算子である。なじみ深い角運動量の場合で言えば，“上昇”および“下降”演算子は荷量の線型結合として見いだすことができ，同じ表現の中で1つの状態を他の状態へ移す。荷量がすべてハミルトニアンと可換であれば，これはカレントが発散を持たず，対称性が正確に成立つ場合にあたるが，状態はすべて同じエネルギー（あるいは質量）を持ち，縮退した多重子をつくる。もちろん，同じ質量はすでにラグランジアン（2・38），（2・88），（2・93）の中に組みこまれていたのである。しかし，第6章では，すこし異なった可能性もありうることを論ずる。ラグランジアンは対称性を維持しカレントも発散を持たないけれども，対称性をユニタリー変換として導入できない。このときは一般に状態の多重構造は現われない。

2・4　Gell–Mann–Levy の方法

場にある対称性の変換を施すとき，それに対応するカレントを見いだす別の方法を解説して，この章を閉じよう。この手続きは，Gell–Mann & Levy (1960) が与えたもので，たとえ対称性が完全でなくても（このような場合はまれではない）カレントの簡便な定義を与え，その発散を見いだすための近道を示しているので，極めて有用である。また，大局的不変性と局所的不変性の概念も導入している。

ラグランジアン密度$\mathscr{L}(\phi_r,\ \partial_\mu\phi_r)$を考えよう。フェルミオン場もボソン場も同じ記号のものに包攝するものとする。場は時空間の座標に依存する無限小変換により

$$\phi_r(x) \to \phi'_r(x) = \phi_r(x) - \mathrm{i}\epsilon_\alpha(x)F_r{}^\alpha(\phi) \tag{2.98}$$

のように変換する。変換（2・74），（2・87）とは異なり変換（2・98）の$\epsilon_\alpha(x)$は時空座標xに依存することを再び強調しておく。変換（2・74），（2・87）のように場の時空座標に依らない変換は大局的変換と呼ばれる。一方，変換（2・98）のようにパラメターが時空座標に依る変換は局所的変換と呼ばれる。パラメターの値は場の局所的な引数の値によって変化する。次の章で論ずるとおり，局所的変換はゲージ諸理論にとって決定的に重要である。もちろん，§2・2で行ったような時空座標そのものの変換を考えているのではないことに注意しなくてはならない。

変換（2・98）のもとで，$\mathscr{L}$は

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}(-\mathrm{i}\epsilon_\alpha(x)F_r{}^\alpha(\phi)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\mu(-\mathrm{i}\epsilon_\alpha(x)F_r{}^\alpha(\phi)) \tag{2.99}$$

$$= -\mathrm{i}\epsilon_\alpha(x)F_r{}^a(\phi)\cdot\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\mu(-\mathrm{i}\epsilon_\alpha(x)F_r{}^\alpha(\phi)) \tag{2.100}$$

のように変わる。ここで運動方程式（2・5）を用いた。式（2・100）はまた

$$\delta\mathcal{L} = j^{\alpha\mu}(x)\partial_\mu\epsilon_\alpha(x) + \epsilon_\alpha(x)\partial_\mu j^{\alpha\mu}(x) \tag{2.101}$$

とも書ける。ただし［式（2・44）参照］

$$j^{\alpha\mu}(x) = -\mathrm{i}F_r{}^\alpha(\phi)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\epsilon_\alpha(x))} \tag{2.102}$$

$$\partial_\mu j^{\alpha\mu}(x) = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial\epsilon_\alpha} \tag{2.103}$$

である。式（2・101）の形から，もし$\mathscr{L}$が変換（2・98）の大局的な形のもとで不変であれば，ϵ_αが定数であるから，式（2・102）で定義されたカレントは保存していることがわかる。式（2・101）を利用する実例として，$\mathscr{L}$をラグランジアン（2・54），変換を式（2・55）の局所的な形

$$\phi'(x) = (1 - \mathrm{i}\epsilon(x))\phi(x) \tag{2.104}$$

ととれば，$\delta\mathscr{L}$は

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \epsilon(x) \cdot \mathrm{i}(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^\dagger \phi) \tag{2.105}$$

カレントは

$$j^{3\mu} = \mathrm{i}(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^\dagger \phi) \tag{2.106}$$

となって，式（2・56）と一致する。$[\partial(\delta\mathscr{L})]\ /\ [\partial\epsilon(x)] = 0$ だから，カレントの発散もゼロである。

対称性が正確でない場合にもこの方法が有用である実例として，u場およびd場が異なった質量を持つラグランジアン（2・88）を考えよう。

$$\mathcal{L} = \bar{u}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_\mathrm{u})u + \bar{d}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_\mathrm{d})d \tag{2.107}$$

これは行列の形

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{2.108}$$

に書け，質量行列mはψの2次元空間で

$$m = \tfrac{1}{2}m_0 + \tfrac{1}{2}\delta m \tau_3 \tag{2.109}$$

である。ただし，$m_0 = m_\mathrm{u} + m_\mathrm{d}$，$\delta m = m_\mathrm{u} - m_\mathrm{d}$ とおいた。変換（2・87）の局所的な形

$$\psi'(x) = (1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(x)/2)\psi(x) \tag{2.110}$$

のもとで

$$\delta\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma^\mu\psi \cdot \partial_\mu\boldsymbol{\epsilon}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}m\psi \cdot \boldsymbol{\epsilon}(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}m\boldsymbol{\tau}\psi \cdot \boldsymbol{\epsilon}(x) \tag{2.111}$$

が成立ち，したがってカレントを

$$j^{a\mu}(x) = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\tau^a\psi \tag{2.112}$$

で定義し，その発散を

$$\partial_\mu j^{a\mu}(x) = \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}[m, \boldsymbol{\tau}]\psi \tag{2.113}$$

で与えることができる。明らかに，この場合，τ_3は式（2・109）のmと交換するから，カレントの$a=3$成分は保存する。しかし，第1，第2成分の発散はともに質量差δmに比例し，$\delta m = 0$でない限り保存しない。これは予期し

ていた通りの結果である。

$j^{1\mu}$, $j^{2\mu}$ は保存しないが，カレントはやはり式（2・112）で定義されていることに注意してほしい。特に，カレントに付随する荷量はやはり交換関係（2・82）に従うのである。荷量と（多少変更がいるかもしれないが）カレントの演算子が同じ交換関係をみたすということは，たとえ対称性が正確でなくとも，これらの交換関係を重現すべきことを示唆している。対称性が近似的にしか成立しなくても，代数は依然正確に成立つかもしれないのである。これが Gell-Mann のカレント代数（§6・8を参照）の概念の出発点である。

3

ゲージ場とゲージ原理

この章では，物質場のラグランジアンが局所的位相変換のもとで不変に保たれると要請すると，物質場とある決まった形で相互作用をするベクトル場(ゲージ場）を導入せざるをえないことを説明する。非可換変換の場合，ベクトル場の自己相互作用もまた決まってしまう。

3・1　電磁場の包摂：ゲージ不変性

量子力学，あるいは場の量子論で電磁相互作用を導入する慣用の手法は，いわゆる“極小相互作用の処方”である。それは電荷 q を持つ粒子の運動量 p^μ を $p^\mu - qA^\mu$ で置き換えるだけである。A^μ は電磁場の（4元）ベクトル・ポテンシャルである。こうすれば，対応する古典的ハミルトニアンは，Hamilton の運動方程式を通じて Lorentz 力を正しく再現する。量子力学では p^μ は $i\partial^\mu$ で置き換えられるから，処方は

$$\partial^\mu \to \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu \tag{3.1}$$

になる。結合　$\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu$　は基本的に重要なので，“共変微分”と呼び，D^μで表わす。

$$D^\mu \equiv \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu \tag{3.2}$$

D^μの意義はこれから議論を進めるにつれて明らかになるであろう。

処方 $\partial^\mu \to D^\mu$ は場の量子論へも適用することができる。たとえば，質量 m を持つ自由な Dirac 粒子のラグランジアン

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi \tag{3.3}$$

は，この置き換えにより

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{int}} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{3.4}$$

となる。ただし，場 ψ は電荷 q を持つ粒子に対応するとした。完全なラグランジアンを求めるには，もちろん式（3・4）にポテンシャル A^μ の従う Maxwell 方程式を再現する部分をつけ加えなくてはならない。詳しい考察は次の

章までもちこすとして（この章の主な関心は対称性にある），電磁場の標準的な古典ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.5}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.6}$$

であることだけ思い出しておこう。完全なラグランジアン $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{em} + \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{int}$ に対して，Euler–Lagrange の方程式は，A^μ の場の方程式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \tag{3.7}$$

を与える。j^μ はカレント $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ である。この式は確かに Maxwell 方程式を正しく再現している。

いつものように，電磁場を4元ベクトル・ポテンシャル A^μ によって導入した。物理的な電場および磁場は，ポテンシャル $A^\mu=(V, \mathbf{A})$ と

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{3.9}$$

の関係にある。V および $\mathbf{A}$ は，式（3・8），（3・9）によって一意に定義されるのではない。実際，任意の微分可能なスカラー関数 χ に対して，変換

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \tag{3.10}$$

を施しても $\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ は変わらない。これが Maxwell 方程式のゲージ不変性と呼ばれる性質である。変換（3・10）はベクトル・ポテンシャル（あるいは電磁場）のゲージ変換である。

式（3・10）は古典的な Maxwell 方程式の不変性であるから，量子論においても成立つ不変性であると期待すべきである。しかし，一見したところそうではない。確かに，電磁場だけのラグランジアン（3・5）は変換（3・10）のもとで不変である。$F_{\mu\nu}$ は一種の4次元的“回転”であって，勾配がつけ加わっても不変である。しかしながら，$\mathscr{L}_{int}$ は確かに変換（3・10）のもとで変わる。もしこの変化分が全微分で表わされるのであれば，$\mathscr{L}$ の積分だけを含む作用原理によって導かれる場の方程式は変わらないはずである。しかし，$\delta\mathscr{L}_{int} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\chi$ は全微分ではない。ただひとつ残る可能性は，$\mathscr{L}_{int}$ の中に起こる変化が自由場の部分 $\mathscr{L}_0$ の中におこる変化と打消す場合に限られる。

A^μ がゲージ変換（3・10）に従うとき，場 ψ もまた特別な形

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(-iq\chi(x))\psi(x) \tag{3.11}$$

の局所的位相変換に従うと考えれば，このような相殺を起こさせることができ

る。変換（3・11）により，式（3・3）の$\mathscr{L}_0$は

$$\delta\mathcal{L}_0 = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\partial_{\mu}\chi \tag{3.12}$$

だけ変化し，まさしく$\delta\mathscr{L}_{\text{int}}$を打消すことを容易に示すことができる。全ラグランジアン$\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_{\text{em}}$は変換（3・10），（3・11）の組合せのもとで不変である。したがって，これらの変換が場の量子論におけるゲージ不変性を表わす。変換（3・11）は電荷qを持つ任意の粒子に拡張した。

電磁相互作用がある場合のカレント演算子について，一言注意を与えておいてこの節を終ろう。式（3・3）の形のフェルミオンのラグランジアンに対して，Gell–Mann–Levy の手続きにより式（3・12）から

$$j^{\mu} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{3.13}$$

が得られる。これはもちろん，A^{μ}が存在しないときの 1 パラメター大局的$U(1)$位相変換に関連したカレントと同じである。しかし，ボソンの場合の事情は興味深い。処方（3・1）を自由な複素スカラー場

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_{\mu}\phi)^{\dagger}(\partial^{\mu}\phi) - m^2\phi^{\dagger}\phi \tag{3.14}$$

に適用すると，相互作用

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathrm{i}qA_{\mu}[\phi^{\dagger}\partial^{\mu}\phi - (\partial^{\mu}\phi)^{\dagger}\phi] + q^2A^2\phi^{\dagger}\phi \tag{3.15}$$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))\phi(x) \tag{3.16}$$

が得られる。Gell–Mann–Levy の変換を式（3・14），（3・15）の$\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{\text{int}}$に適用すれば

$$j^{\mu}(x) = \mathrm{i}q[\phi^{\dagger}\partial^{\mu}\phi - (\partial^{\mu}\phi)^{\dagger}\phi] - 2q^2A^{\mu}\phi^{\dagger}\phi \tag{3.17}$$

がでる。この式を

$$j^{\mu}(x) = \mathrm{i}q\{\phi^{\dagger}(\partial^{\mu} + \mathrm{i}qA^{\mu})\phi - [(\partial^{\mu} + \mathrm{i}qA^{\mu})\phi]^{\dagger}\phi\} \tag{3.18}$$

と書き直せば，これは共変微分の置き換え（3・1）を行って大局的な形（2・56）をゲージ不変にしたものにほかならない。式（3・13）にはない式（3・17）の中の余分な項は，ボソンのカレントの中の勾配から生じたものである。

式（3・13），（3・17）のいずれの場合も，カレントは実際に

$$-\frac{\partial(\mathcal{L}_{\text{total}})}{\partial A_{\mu}} \tag{3.19}$$

で表わされることは，極めて重要な意義を負う。Euler–Lagrange の方程式からわかるように，これはA^{μ}に対する Maxwell の方程式の“右辺”に表われる量なのである。このことは最終的に，式（3・13），（3・17）を電磁カレントであると解釈する拠りどころになっている。カレントが2重の役割を果たすことが，

ゲージ場の理論の特徴である。カレントはNoetherの意味での対称性を表わすカレントでもあり，またベクトル場の“源泉（湧き出し）”にもなっているのである。

3・2　大局的および局所的位相不変性：ゲージ原理

さて，前節の議論を逆にして，ゲージ諸理論の展開に欠くべからざる概念を導入することにしよう。

前節で見たように，大局的位相変換は，いろいろな対称性と結びつき，したがってNoetherの定理を介して保存則と関連しているから，素粒子の物理ではありふれたものである。場の位相を任意に変更してもよいことは，位相が単なる規約にすぎないことを意味する。§2・3で扱った$SU(2)$変換の場合は，幾何学的解釈を行うことが多い。実際，われわれも場の空間での“回転”として取扱ったものであった。明確に話を進めるために，今後，これをアイソスピンの$SU(2)$と呼ぶことにしよう。式（2・74)，（2・87）の形の$SU(2)$変換に対する不変性は，ある種の“回転不変性”と密接な類似性がある。このような不変性の物理的帰結を論ずるひとつの方法は，任意に“アイソ空間の軸”を選ぶことができると考えることである。言い換えれば，陽子に結びついた場（$I_3=1/2$)と中性子に結びついた場（$I_3=-1/2$)の定義は，正確な$SU(2)$不変性の成立つ極限では，ユニタリー変換を除いては全く規約に過ぎない*。しかし，この種の大局的対称性は，時空間の1点で，いったんある規約を決めてしまうと，ほかのすべての時空間の点でも同じ規約に従わなくてはならないことを意味する。変換は時空間の1点から1点へ移っても変わらないからである。Yang & Mills（1954）は，これが合理的であるかどうかに，疑問をなげかけた最初の人々であった。彼らは次のように論じた。“これは普通の物理理論の基礎にある局所場の概念とあいいれないように思われる。この論文では，すべての相互作用が，時空間のすべての点で，アイソスピンの独立な回転に対して不変になるという可能性を追求してみようと思う。”これが，注目すべき非可換ゲージ場の理論（§3・3参照）の始まりであった。

Yang & Millsの提案は，理論が局所的位相変換のもとで不変になる要請に等しい。ただひとつの位相のパラメターを含む極めて簡単な$U(1)$群の場合に，これがどう働くのか調べてみよう。ラグランジアン

* しかし，電磁相互作用は$SU(2)$不変ではないから，陽子と中性子の区別がつくことに注意せよ。

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{3.20}$$

から出発する。これは確かに大局的位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha)\psi(x) \tag{3.21}$$

のもとで不変である。さてこれが局所的位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))\psi(x) \tag{3.22}$$

のもとで不変になる“可能性を追求”してみよう。この段階は形式的にはGell–Mann–Levy の手続きと同じである。しかし，ここでは，変換（3・22）に対して実際に不変になる全ラグランジアン$\mathscr{L}_1$が存在することを要求するのである。明らかに$\mathscr{L}_0$には

$$\delta\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\,\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{3.23}$$

の変化を生ずる。ここで$\delta\mathscr{L}_1=0$を要請すれば，$\mathscr{L}_1$は$\mathscr{L}_0$のほかにある項を含み，変換（3・22）のもとでのこの項の変化が正確に$\delta\mathscr{L}_0$を相殺するものでなくてはならない。このような$\mathscr{L}_1$はもちろん

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 - q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{3.24}$$

であって，ψが変換（3・22）を受けるときA_{μ}が

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \frac{1}{q}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{3.25}$$

のように変化するとしなくてはならない。$\alpha(x)$を$q\chi(x)$と書けば，まさに変換（3・10），（3・11）とはじめの“極小相互作用の処方”のラグランジアンが再現される。変換（3・25）に従うベクトル場を導入することは，局所的な自由度を位相の規約としてとり入れる以上，避けられないことと考えられる。さらにベクトル場は，式（3・25）の変換を施しても物理的な結果は変わらないようなものでなくてはならない。変換（3・25）は$\mathscr{L}_1$の局所的不変性の一部だからである。このようなベクトル場をゲージ場と呼ぶ。少なくとも，この簡単な実例では，局所的位相不変性の要請は，物質場ψとゲージ場A_{μ}の間に，相互作用$-q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\cdot A_{\mu}$を“創り出した”のである。これが，ゲージ原理が力学理論を導くという主張の精髄である。要請した局所的位相不変性が成立つような相互作用といっしょに，適切なゲージ場が導入されるのである。

しかしながら，ただちに次の事情を認めざるをえない。A_{μ}に対するゲージ変換（3・25）が変換（3・22）とともに実際にラグランジアンを不変にするのであれば，一見して，ベクトル場A_{μ}が質量をもつことはできない。質量は$\mathscr{L}$の中に$\frac{1}{2}m^2A^2$の形で入り，これが変換（3・25）のもとで不変にならないこと

は極めて明らかだからである。（質量を持つベクトル場については第5章でさらに考察する。）したがって，相互作用を創り出すという卓抜な着想は，質量を持たないベクトル場に限られるように思われる。

Yang & Mills（1954）の原論文は，1パラメターの局所的位相変換（3・22）に対する不変性を，アイソスピン型の局所的位相変換

$$\psi \to \psi' = \exp\left(-ig\theta_a(x)t^a\right)\psi(x) \tag{3.26}$$

へ拡張している。ここに行列t^a（$a=1, 2, 3$）は多重子ψに応じた表現の$SU(2)$代数を表わす。このような不変性は3個のゲージ場$A_\mu{}^a(x)$を必要とする。ψが局所的位相変換（3・26）に従うとき，$A_\mu{}^a(x)$は変換（3・25）に類似した変換を受けるのである。実際の変換の形は式（3・25）より少し複雑であるが，局所的不変性が相互作用をどう決定するかということも含めて，§3・3で論ずることにする。

しかしながら，ここでもまた，ベクトル場$A_\mu{}^a(x)$は質量を持ってはならないように見える。Yang と Mills 自身は，ハドロンのアイソスピンにもとづいてその着想を展開したのであった。彼らは，ハドロンの相互作用を，アイソスピンが局所的に不変になる結果として説明したいと考えたのであった。（大局的なアイソスピン不変性は，少なくとも近似的には，素粒子構造として顕れている。）しかし，強い相互作用を行うベクトル粒子ρ，ω，ϕなどが（待ち望まれていながらも）発見される前であったとはいいながら，当時はこの着想は見込み薄であった。強い力はいつも短い到達距離をもっていて，質量を持たないゲージ量子で伝達されるようなものでないことは明らかであったからである。それにもかかわらず，この考えは櫻井（1960）によって大胆にも推進されていった。

1954年より暫くのちのある有利な時点ではおそらく次のように論ずることもできたかもしれない。強い相互作用を発現させるゲージ原理は，明らかに複合粒子であるハドロンよりいっそう基本的なレベル，ハドロンの構成粒子間の相互作用に適用すべきであると。現在では，そのように考えられており，QCDがまさにクォークの相互作用のゲージ理論である（§3・4参照）。しかしながら，レプトン間の弱い相互作用は（クォークと同じレベルで）基本的であり，弱い相互作用をゲージ場の理論で記述する望みは，1964年までは，ハドロンの物理と同じ理由で失望視されていた。§1・1で見たように，力を伝達するベクトル粒子は，質量を持たなくてはならなかったからである。ゲージ原理は依然成立しているが，これに付随した対称性は“隠れて”いる（あるい

は“自発的に破れている”）——ユニタリー変換では表わせない——ことがありうる。これが認識されて突破口が開かれた。あとで詳しく論ずるように，ゲージ場は質量を獲得するようになる。さらに，このような理論のゲージ不変性は，対称性は隠れていても，くりこみ可能であることがそのとき証明されて（'t Hooft 1971*b*），初めて，弱い相互作用の計算可能な理論がつくられるようになったのである。隠れた対称性を実現した Yang–Mills 型のゲージ場の理論（“弱いアイソスピン”*の概念を用いる，第7章参照）をとりいれた Glashow–Salam–Weinberg の弱い相互作用の理論（あるいはその一般化）は，いまのところ，弱い相互作用の現象を正しく記述することがひろく認められているといってよい。

隠れた対称性の議論は第6章まで伏せておいて，この章では非可換ゲージ場（Yang–Mills 理論）を一瞥しておく。

3・3　局所的非可換対称性

式（3・26）の型の局所的非可換変換のもとで不変になるラグランジアンの可能性を調べることにしよう。この変換は，§2・3で考察した大局的非可換対称性［$SU(2)$ など］の一般化になっている。

一般論よりも，非形式的で実用的な本書の方針に従って，まず実例モデルを取扱おう。再び§2・3で考察したラグランジアン

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi)-\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi-\tfrac{1}{2}\lambda^2(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{3.27}$$

を考える。これはアイソスピノルのボソン ϕ を記述する。§2・3で見たように，このラグランジアンは ϵ を定数とする大局的アイソスピン変換

$$\delta\phi(x)=-i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\,\phi(x) \tag{3.28}$$

のもとで不変である。変換（3・28）を局所的にした変換

$$\delta\phi(x)=-ig\boldsymbol{\epsilon}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2\,\phi(x) \tag{3.29}$$

のもとで，このラグランジアンを不変にするような方法をさがすことにする。変換（3・26）と形が合うように定数 g を挿入した。これは電磁相互作用との類推から結合の強さを表わすと解釈できる。余談であるが，この特定のモデルを考察するのは，これが GSW 理論の本質的な部分であることがあとで知られるからである。

明らかに，ラグランジアン（3・27）は変換（3・29）のもとで不変ではない。

* よく知られたハドロンのアイソスピン対称性ではない。

式（3・23）とまったく同様に，$\partial_\mu\epsilon(x)$の項が現われるからである。しかし，適切な変換性を持つゲージ場を導入すれば，余分な項を消去しうることもまた同様に明らかである。3つの微分項$\partial^\mu\epsilon^a(x)$があるから，ここでは3つのゲージ場が必要である。それらを$W^{a\mu}(x)$と呼ぶことにしよう。必要な処方は，実は電磁相互作用の1パラメターの場合に用いた処方，“極小相互作用の置き換え”（あるいは共変微分の置き換え）の簡単な一般化である。

電磁相互作用［$U(1)$］の共変微分

$$D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu \tag{3.30}$$

の最も重要な性質は，$D^\mu\psi(x)$が局所的な変換の組合わせ

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = \exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\psi(x)\\ A^\mu(x) &\to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu\chi(x),\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

のもとで行う変換は，$\partial^\mu\psi(x)$が大局的な変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp(-\mathrm{i}q\chi)\psi(x) \qquad (\chi\ 一定) \tag{3.32}$$

のもとで行う変換とまったく同じであるということである。この主張は，次のように容易に験証することができる。

$$\begin{aligned}(D^\mu\psi(x))' &= (\partial^\mu + \mathrm{i}qA'^\mu(x))(\exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\psi(x))\\ &= -\mathrm{i}q\,\partial^\mu\chi(x)\cdot(\exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\psi(x)) + \exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\partial^\mu\psi(x)\\ &\quad + \mathrm{i}qA^\mu(x)\exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\psi(x)\\ &\quad + \mathrm{i}q\,\partial^\mu\chi(x)\cdot\exp(-\mathrm{i}q\chi(x))\psi(x)\\ &= \exp(-\mathrm{i}q\chi(x))(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu(x))\psi(x)\\ &= \exp(-\mathrm{i}q\chi(x))(D^\mu\psi(x))\end{aligned} \tag{3.33}$$

これから，大局的変換（3・32）のもとで不変な$\mathscr{L}_0$はすべて，単に∂^μをD^μで置換えるだけで局所的に不変になることが出てくる。

したがって，$SU(2)$という特定の例題でも，$\mathscr{L}$を局所的に$SU(2)$不変にするためには，D^μの適切な一般化が必要である。この場合の答は

$$D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{W}^\mu(x)/2 \tag{3.34}$$

である。この形は$SU(2)$ 2重子に適切な形であって，これが特徴的な行列$\boldsymbol{\tau}/2$が現われる理由である。式(3・34）の中に現われるD^μはϕの成分に作用する行列であることを強調しておく。ほかの$SU(2)$表現に従って変換する場に適合するD^μの定義は，のちに述べる。式（3・34）に要求されている性質は，$D^\mu\phi$（ϕはアイソ2重子）が局所的$SU(2)$変換（3・29）のもとで行う変換は

$\partial^\mu\phi$ が大局的 $SU(2)$ 変換（2・95）のもとで行う変換とまったく同じでなくてはならない，ということである。この要求がゲージ場 $W^{a\mu}(x)$ の変換法則を決めてしまう。すなわち

$$\delta(D^\mu\phi) = -\mathrm{i}g\boldsymbol{\epsilon}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2(D^\mu\phi) \tag{3.35}$$

である。左辺は $\delta[(\partial^\mu+\mathrm{i}g\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu/2)\phi]$ であって，$\delta\mathbf{W}^\mu$ を含む。$\mathbf{W}^\mu$ の無限小変換法則は

$$\delta\mathbf{W}^\mu(x) = \partial^\mu\boldsymbol{\epsilon}(x) + g\boldsymbol{\epsilon}(x)\times\mathbf{W}^\mu(x) \tag{3.36}$$

になることを確かめてみるのは，よい演習問題である。式（3・36）の第1項はふつうの非斉次項で，$A^\mu(x)$ の電磁ゲージ変換と同じく，$\delta\mathscr{L}$ の中の $\partial^\mu\epsilon(x)$ 項を消去する。第2項は式（2・74）を参照すると容易に解釈できる。これは単に，場 $\mathbf{W}^\mu$ が大局的 $SU(2)$ 変換のもとでアイソベクトルの成分であることを示す。

話を完全に仕上げるために，$\mathbf{W}^\mu$ の変換法則を，無限小変換の場合ではなく有限の場合に与えておこう。ϕ の変換を

$$\phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{3.37}$$

と書く。$U(x)$ は

$$U(x) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2)\phi(x) \tag{3.38}$$

でユニタリー性

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{3.39}$$

をみたす。性質

$$D'^\mu\phi'(x) = U(x)(D^\mu\phi(x)) \tag{3.40}$$

あるいは同じことであるが

$$D'^\mu = U(x)D^\mu U^\dagger(x) \tag{3.41}$$

を要請する。D'^μ もまた $\partial^\mu+\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}(x)/2$ であるから

$$\partial^\mu + \mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}'^\mu(x)/2 = U(x)[\partial^\mu + \mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu(x)/2]\,U^\dagger(x) \tag{3.42}$$

が成立つ。ここで（圧縮しすぎる危険を冒すかもしれないが）記法

$$W^\mu(x) \equiv \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu(x)/2 \tag{3.43}$$

を導入すると，式（3・42）は

$$W'^\mu(x) = -\mathrm{i}U(x)[\partial^\mu U^\dagger(x)] + U(x)W^\mu(x)U^\dagger(x) \tag{3.44}$$

となる。この式から無限小変換の形（3・36）を再現してみることもまたよい演習問題である。

さて，ここで，大局的 $SU(2)$ 変換のもとで不変な ϕ と $D^\mu\phi$ の任意の関数は，

また局所的 $SU(2)$ 変換のもとでも不変である，と主張することができる。残っているのは，$\mathbf{W}^\mu$ 自身を記述するラグランジアンの問題だけである。電磁場の場合のテンソル　$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$　を用いたが，これはその変換法則の中に非斉次項を含まなかった。この事実は，$\mathbf{F}^{\mu\nu}$ としては局所的 $SU(2)$ 変換のもとで単にアイソベクトルとして変換するものを探せばよい，ということを示唆する。答は

$$\mathbf{F}^{\mu\nu}=\partial^\mu\mathbf{W}^\nu-\partial^\nu\mathbf{W}^\mu-g\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}^\nu \tag{3.45}$$

である。変換（3・36）より

$$\delta\mathbf{F}^{\mu\nu}=g\boldsymbol{\epsilon}(x)\times\mathbf{F}^{\mu\nu} \tag{3.46}$$

が出るからである。したがって，ラグランジアンの局所的に $SU(2)$ 不変な部分は

$$\mathcal{L}_W=-\tfrac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu} \tag{3.47}$$

である。スカラー積は $SU(2)$ の空間でとる。これからラグランジアン（3・27）の完全に局所的 $SU(2)$ 不変な形は

$$\mathcal{L}=(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)-\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi-\tfrac{1}{2}\lambda^2(\phi^\dagger\phi)^2-\tfrac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu} \tag{3.48}$$

である。以上の方法と結果について，いくつかの補足を加えておく。

1．まず第一に，$U(1)$ の場合と同じように，“共変微分”の処方はゲージ場 $W^{a\mu}$ と物質場 ϕ との相互作用を決めてしまう。

2．しかし第二に，たとえ物質場が存在しなくても，ラグランジアンの中の“純　Yang–Mills”部分 $\mathscr{L}_W$ は相互作用を含む。これは電磁場では起こらない事情である。$\mathscr{L}_{\mathrm{em}}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$　は相互作用のない Maxwell 理論を記述する。実は式（3・47）の記法は極めて簡約されているので，解体しておく値打ちがある。

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}=&-\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\mathbf{W}_\nu-\partial_\nu\mathbf{W}_\mu)\cdot\partial^\mu\mathbf{W}^\nu\\&+g(\mathbf{W}_\mu\times\mathbf{W}_\nu)\cdot\partial^\mu\mathbf{W}^\nu\\&-\tfrac{1}{4}g^2\left[(\mathbf{W}_\mu\cdot\mathbf{W}^\mu)^2-(\mathbf{W}_\mu\cdot\mathbf{W}_\nu)(\mathbf{W}^\mu\cdot\mathbf{W}^\nu)\right]\end{aligned} \tag{3.49}$$

明らかに，この中には3重線型および4重線型の結合が含まれている。ラグランジアンから Feynman 規則を導く定石に従えば，これらは図3・1に示す3点（または3枝）頂点や図3・2に示す4点頂点を表わす。したがって，Yang–Mills の（非可換）ゲージ場の理論は非線型である。ゲージ場自身が自己相互作用を行うからである。場は“アイソスピン場の量子”であるから，みずからアイソスピンを帯びる。これは電磁場と基本的に，また本質的に異なる

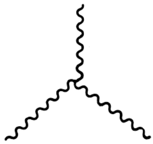


図3・1　ゲージ場の3点結合

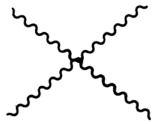


図3・2　ゲージ場の4点結合

点である。光子は電荷を帯びていない。

3．一般に，非可換ゲージ場は，問題になっている局所群Gの正則表現に従って変換しなくてはならない（Glashow & Gell–Mann，1961）。

4．共変微分の一般的な定義は次のごとくである。物質場ϕが変換群Gのもとで，あるp次元の表現に従って変換するとする。

$$\delta\phi = -\mathrm{i}g\epsilon_\alpha(x)t^\alpha\phi \tag{3.50}$$

ここにt^α($\alpha=1, 2, \cdots\cdots$)は$G$の代数

$$[t^\alpha, t^\beta] = \mathrm{i}c_{\alpha\beta\gamma}t^\gamma \tag{3.51}$$

に従うp行p列の行列で，生成演算子の数だけある。$c_{\alpha\beta\gamma}$は構造定数である。このとき

$$D^\mu\phi = \partial^\mu\phi + \mathrm{i}gt^\alpha W^{\alpha\mu}\phi \quad (\alpha\text{の和をとる}) \tag{3.52}$$

ととればよい。ゲージ場$W^{\alpha\mu}(x)$は変換（3・50）に非斉次項を加えるように変換する。

$$\delta W^{\alpha\mu}(x) = \partial^\mu\epsilon^\alpha(x) + gc_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^\beta(x)W^{\gamma\mu}(x) \tag{3.53}$$

正則表現の行列は

$$(t^\alpha)_{\beta\gamma} = -\mathrm{i}c_{\alpha\beta\gamma} \tag{3.54}$$

だからである〔式（2・86）参照〕。注目すべきことは，式（3・53）による$W^{\alpha\mu}(x)$の変化はまさしく$\epsilon^\alpha(x)$の共変微分なのである。

$$\delta W^{\alpha\mu}(x) = (D^\mu\epsilon(x))^\alpha \tag{3.55}$$

場のテンソル（3・45）の一般化は

$$F^{\alpha\mu\nu} = \partial^\mu W^{\alpha\nu} - \partial^\nu W^{\alpha\mu} - gc_{\alpha\beta\gamma}W^{\beta\mu}W^{\gamma\nu} \tag{3.56}$$

で与えられる。

有限な変換（3・44）は，τ行列を含む行列（3・43）から導かれた。τ行列は，はじめの例題ではアイソスピノルの物質場ϕを考えたから現われたのにすぎない。より一般的には，行列

$$W^\mu = t^\alpha W^{\alpha\mu} \tag{3.57}$$

を導入することができる。t^α は任意の表現で生成演算子を表わす行列である。式（3・43）は，式（3・57）の W^μ の有限ゲージ変換として依然成立する。同じように行列

$$F^{\mu\nu}=t^\alpha F^{\alpha\mu\nu} \tag{3.58}$$

を定義すると，これを用いて式（3・56）を

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu W^\nu-\partial^\nu W^\mu+ig[W^\mu, W^\nu] \tag{3.59}$$

と書くことができる。ここで交換関係（3・51）を用いた。この行列記法を用いて，共変微分が群の正則表現に従って変換する量 R^α に作用するとき，共変微分の形を次のように書くことができる。

$$R=t^\alpha R^\alpha$$

を作ると

$$D^\mu R=\partial^\mu R+ig[W^\mu, R] \tag{3.60}$$

である〔式（3・53），（3・51）参照〕。

5．決定的に重要な点は，以上のすべての方程式の中でただひとつの“g”を用いたことを見逃してはならないことである。変換法則の中の g が，場が異なれば同じでないとすれば，上に述べたことは全く機能しないのである。これがまた，$U(1)$ の場合とは全く異なる。$U(1)$ の場合は，それぞれの荷電場は A_μ と“それ自身”との電荷 e, $2e$, $-3e$, ……等々で結合することができるし，また事実している。いったん $\delta\mathbf{W}_\mu$ を式（3・53）の g で決め，式（3・29）（3・34）の中に別の g' を用いたとするならば，$g=g'$ でないかぎり式（3・53）は得られないことを検証してみることは，有益な演習問題である。この結果は $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$ と $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}_\mu$ の間の自明でない交換関係によることが明らかになるであろうが，これこそ非可換理論の特徴なのである。定性的に言えば，“明確な交換関係を持つ演算子の尺度を任意に変更することはできない”，ということである。したがって，ある群 G のもとで変換する Yang–Mills 場には正確にただひとつの結合定数しか存在しない。この事実を，ゲージ場はすべての物質場と普遍的に結合するという。

6．ただひとつの結合定数 g が存在するという意味での普遍性は，生成演算子が２つ以上の組に分離され，それぞれの組の中では交換しないが別の組の生成演算子とは交換する，という事情がない限り成立する。この事情があるときは $G=G_1\times G_2$……と書き，G_1 の生成演算子は G_2 その他の生成演算子と交換するものとする。たとえば，今まで考えていたモデル（3・48）では，実際は U

(1)不変性

$$\phi \to \phi' = \exp(-i\alpha)\phi \qquad (3.61)$$

が大局的 $SU(2)$ と同時に成立する。ϕ はいつも $\phi^\dagger$ との積で現われるからである。したがって，式（3・53）の完全な大局的不変群は　$SU(2)\times U(1)$　である。もちろん，これはわざとそうしたのであって，後に見るようにGSW 理論の不変群がそう選ばれているからである。この対称性を“ゲージ化”すると（GSW 理論そのもの），２つの独立な結合定数を取扱うことになる。

7. 実際，$U(1)$ はすこし特別な場合である。なぜ個々の荷電粒子が A^μ とそれ自身の電荷以外で結合してはいけないのか，本当の理由は何もない。$U(1)$ 対称性に関する限り，荷電粒子の電荷は e の単位で量子化されている必要はない。これが，$SU(2)\times U(1)$　のタイプの群［もちろん $U(1)$ は電磁ゲージ群そのもの，あるいはそれを含む］を，このように“因子化”できないより大きな群の中に埋めこんでしまう，という発想の動機になっている。（Georgi & Glashow 1974，特にその脚注 10）。

8. 式（3・48）の $SU(2)$ 不変性に対応する Noether（Gell–Mann–Levy）カレントを計算してみると面白い。結果は

$$j^{a\mu} = ig\left(\phi^\dagger\frac{\tau^a}{2}\phi - (\partial^\mu\phi)^\dagger\frac{\tau^a}{2}\phi\right) - \frac{g^2}{2}\phi^\dagger\phi W^{a\mu} + g(\mathbf{F}^{\mu\nu}\times\mathbf{W}_\nu)^a \qquad (3.62)$$

である。この第１項はふつうの大局的カレント（2・96）である。第２項は式（3・17）の第２項に対応する項である。式（3・62）の最初の２項は，大局的カレント（2・96）を置換え $\partial^\mu \to D^\mu$［式（3・34）で与えられる］によって $SU(2)$ 不変にして得たものである。第３項はこれもゲージ不変であって，**W** 場自身が $SU(2)$“アイソスピン”を帯びており，したがってカレントに寄与することに由来する。§3・1に論じた $U(1)$ の例と同じく，カレント（3・62）はまさしく　$(-\partial\mathscr{L})/(\partial W_\mu{}^a)$　であって，$\mathscr{L}$ は式（3・48）で与えられ，W 場の源になっている。

さて，これらの概念を実用的な興味のある場合に応用してみよう。

3・4　強い相互作用の Yang–Mills 理論：QCD 入門

Yang & Mills（1954）の最初の意図は，非可換ゲージ理論を展開してハドロン間の強い相互作用に応用することであった。すでに論じたように，その際の主要な理論的障害は，質量の問題であった。強い相互作用のゲージ場を表わ

すベクトル粒子が質量を持つとき，どのようにして理論のゲージ不変性が保たれるであろうか。今日われわれは，隠れたゲージ対称性がこの二律排反を脱する道であることを知っている（第6章を見よ）。しかし，ゲージ理念が直接にハドロンに応用できるようには見えないことも，また真実である。その理由は次のようである。

一般に，ゲージ場は，大局的対称群に関連するカレントのすべての成分と結合しなくてはならない。この対称性が通常のもの――“顕在的”対称性であれば，ゲージ量子は質量を持たない（“潜在的”対称性については第6章を参照)。ハドロン物理学の $SU(3)_f$ 対称性をこの方法で説明することを考えてみよう。添字 f は“フレイバー”を指し，この対称性は経験的には完全でない。少なくとも近似的に，これは顕在的対称性である。8個の Yang–Mills のベクトル量子が必要であるが，弱い相互作用および電磁相互作用の補正がなければ（これが普通の考え方である），$SU(3)_f$ 対称性が正確である限り，すべて質量を持たない。電磁相互作用と弱い相互作用を発動させれば，アイソスピンの“荷量” I_1, I_2 は電磁補正のため保存しなくなり，“その” W 量子は典型的なハドロン質量の α 倍の程度の質量を獲得するに至ると考えてよい。ハイパー荷 Y はごくわずかしか破れていないはずだから，Y に関連した W 量子はずっと軽いはずである。電荷 Q はおそらく正確に保存され，これに関連した量子は質量を持たない光子である。残りの4つのベクトル量子は，$SU(3)_f$ の強い破れに対応して，典型的なハドロンの質量を持つはずである。したがって，8個のベクトル・ボソンがあって，そのうち4個はハドロンの質量を持ち，2個は数 MeV の質量（電磁質量），さらに1個はそれより小さい質量を持ち，1個は光子であると考えられる。ベクトル・ボソンの質量のこのような分布は，現実に観測されたスペクトルとはほとんど何の関係もない。したがって，ハドロンの相互作用にこの方式を応用してもうまくゆかない。

Yang & Mills の独創的な論文が出てからほぼ30年経った今日，ハドロンはクォークと反クォークから成る複合粒子であると認められている。簡単な（ゲージ型の）電磁相互作用が原子の帯電した構成要素間の力を記述し，原子間の力はどんなに複雑であっても，原理的には構成要素間の力から導くことができるのと同じように，クォーク間の力はおそらく簡単であって，複雑なハドロン間の力は2次的なものであろう，と期待することができよう。もしクォーク間の力がゲージ場の理論で記述できるのであれば，理論は電磁相互作用の場合の美

事な拡張になっているであろう。とすれば，おそらく“基本”粒子はゲージ場の量子を交換して相互作用を行うのであろう。いずれにせよ，クォーク間の強い相互作用の理論の最良（唯一といま言切るわけにはゆかないが）の候補は，まさにゲージ型の理論――量子色力学または QCD――である。

QCD は，§1・1に述べた $SU(3)_C$ カラー対称性を局所的に拡張した非可換ゲージ理論である。クォークは，$SU(3)_C$ の基本的な3次元表現に属し，クォーク場を

$$\psi_i = \begin{pmatrix} q_i{}^{R} \\ q_i{}^{B} \\ q_i{}^{G} \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

と書く。添字 i はフレイバーの指標（u, d, s, c……）を指定し，R, B, G はカラーの指標を表わす。大局的 $SU(3)_C$ 変換は

$$\psi_i \to \psi_i' = \exp(-\mathrm{i}\theta\cdot\lambda/2)\psi_i \tag{3.64}$$

である。θ_α（$\alpha=1, 2,$ ……8）は $SU(3)$ 行列のパラメター，8個の行列 λ^α（3行3列）はGell–Mann（1962）の行列で，$SU(2)$ の τ 行列の拡張である。λ^α は代数

$$\left[\frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^\beta}{2}\right] = \mathrm{i} f_{\alpha\beta\gamma}\frac{\lambda^\gamma}{2} \tag{3.65}$$

に従う〔式（3・51）参照〕。$f_{\alpha\beta\gamma}$ は $SU(3)$ の構造定数である。不変性（3・64）を局所化 $\theta \to \theta(x)$ すると，ひとつの力学理論が得られる。すでに準備を行ってあるから，そのラグランジアンは容易に書下すことができる。

$$\mathcal{L} = \sum_{i=\mathrm{flavour}} \bar{\psi}_i \left(\mathrm{i}\not{\partial} - m_i - g_s \frac{\lambda^\alpha}{2} A^\alpha\right) \psi_i - \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{\alpha} F^{\alpha\mu\nu} \tag{3.66}$$

これは QED の共変微分を

$$D^\mu = \partial^\mu + \mathrm{i} g_s \frac{\lambda^\alpha}{2} A^{\alpha\mu} \tag{3.67}$$

に拡張したものである。

いまや，$SU(3)$ の正則表現に従って変換する8個のゲージ場 $A^{\alpha\mu}$ がある。その量子をグルーオン（膠着子）という。テンソル $F_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ は

$$F_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \partial_\mu A_\nu{}^{\alpha} - \partial_\nu A_\mu{}^{\alpha} - g_s f_{\alpha\beta\gamma} A_\mu{}^{\beta} A_\nu{}^{\gamma} \tag{3.68}$$

であり，g_s は強い相互作用のゲージ結合定数である。$\alpha_s = g_s{}^2/4\pi$ もよく用いられる記号である。ラグランジアン（3・66）にはゼロでないクォークの質

量を入れておいたが，これがゼロになるべき可能性は極めて高い（フェルミオンの質量については§6・8，§7・4を参照)。

実は，式（3・66）はQCDの場の量子論の完全なラグランジアンではないことを明確にしておきたい。これは最低次の摂動論の図形（いわゆる枝線図形）にだけ使えるような“古典場”のラグランジアンである。(QCDの枝線図形の規則はAitchison & Hey（1982）に与えられている。) 次の章でゲージ理論の量子化を論ずる際，“ゲージを決める”項［一般に“お化け（ゴースト)”と呼ばれる項］をこのラグランジアンにつけ加えなくてはならないことがわかる(§4・6参照)。さらにいっそう微妙な点は，

$$\theta\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}{}^{\alpha}F_{\rho\sigma}{}^{\alpha} \tag{3.69}$$

の形の付加項をラグランジアンにつけ加えてもよい。θは任意のパラメターである。この項の起源やその影響をつぶさに調べることは深入りしすぎになる。必要があれば，たとえばLlewellyn Smith（1982 a）を参照せよ。

QCDの展開と応用は今や多岐にわたり，別に1冊の書物を必要とする。最近の総合報告にはEllis & Sachrajda (1980)，Llewellyn Smith (1980，1982 a) がある。

4 ベクトル場の量子化 I ―― 質量を持たない場合

この段階で，質量を持たないベクトル場の量子化を理解しなくてはならないことは，あまりにも明白である。力学を“ゲージ原理”から追求するとき，極めて基本的な役割を演ずるからである。残念ながら，これは技術的に難しい問題であるという事実から逃れようもない。実際，非可換ゲージ理論の完全な Feynman 規則を導くことは，長い間懸案になっていた問題であった。

どのゲージ理論でも，主要な難点は，ゲージ場は運動方程式と初期条件だけでは一意に決定できず，物理的な観測量に影響を与えることなくいつもゲージ変換を受けることができる，という事実から起きてくる。特に $U(1)$ の場合をとれば，ベクトル場 $A^{\mu}(x)$ は，実は 4 個の独立な成分を持っていない。古典電磁気学から，自由な電磁場は 2 つの独立な成分（偏り）しか持たず，A^{μ} と一括される（A^0 と $\mathbf{A}$ のすべての成分にあたる）4 個の成分を持っているのではないことはよく知られている。成分の数は A^{μ} に適当な条件を課すことで減らすことができるが，そうすれば拘束条件のもとでの場の量子化の問題に巻込まれてしまう。このような場の古典的ハミルトニアン力学すらもぶざまなものであるが，さらに量子論では，拘束条件を演算子の条件として課すことはできないことがわかる（後述）。困難はそれだけではない。A^{μ} の拘束条件を定式化する際，古典場の理論でなじみ深い Lorentz 条件

$$\partial_{\mu}A^{\mu}=0 \tag{4.1}$$

をとることもできるし，あるいは非共変的な条件

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=0 \tag{4.2}$$

を採用することもできる。式（4・1），（4・2）のような条件を“ゲージを決める条件”といい，そのどれかひとつを採用することを“ゲージの選択”という。式（4・1）をとる可能性を“Lorentz ゲージ”，式（4・2）をとる可能性を“Coulomb ゲージ”という。共変的なゲージ（4・1）を採択すると，A^0 に対応

する量子は負のノルムを持つ状態を創り出すことになり，ユニタリティと矛盾する危険を侵すことがあとで判明する。一方，条件（4・2）を採用すれば共変性が見えなくなってしまう。もちろん，これらの難点は電磁気学の場合はよく知られており，その解決法も Mandl（1959），Bjorken-Drell（1965），Itzykson-Zuber（1980）などの書物に論じられている。しかし，本書をこれだけで完結した書物にするためにこの章を割いて，質量を持たないベクトル場の量子論を，あまり脇道に入らぬ程度に扱うことにする。質量を持つベクトル場の量子化は次の章で論ずる。

4・1　電磁場

§ 3・1 ですでに見たように，古典的な Maxwell 方程式は，運動方程式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = j^\mu \tag{4.3}$$

をみたす 4 元ベクトル・ポテンシャル $A^\mu(x)$によって共変性を露わにした形に表わすことができる。運動方程式はまた

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu \tag{4.4}$$

と書いてもよい。ただし場のテンソルは

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.5}$$

で定義する。式（4・5）の形から，理論は古典的ゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \tag{4.6}$$

に対して明らかに不変であることが見てとれる。したがって，古典的な場合は，A^μ を拘束するこの自由度を用いて，A^μ を

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.7}$$

をみたすようにとることができる。A^μ はいまや Lorentz ゲージにあることとなり，場の方程式は簡単な形

$$\Box A^\mu = j^\mu \tag{4.8}$$

をとる。この形では A^μ の異なる成分に互いに結合していない。式（4・7），（4・8）は，電磁カレントの保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ が成立てば両立することを注意しておく。

この理論の正準量子化への第一歩として，どのようなラグランジアンが自由場の方程式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \tag{4.9}$$

を与えるか検討してみる。§ 3・1 で見たように，ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{em}}{}^{\text{class}} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.10}$$

である。さてここで量子化を考えよう。A^μ の各成分に正準共軛な“運動量”を計算し，同時刻の交換関係（2・9），（2・10），（2・11）を課してみよう。A^μ の空間成分に関してはすべてうまくゆくが，A^0 ではそうはゆかない。明らかに

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{em}}{}^{\text{class}}}{\partial(\partial_0 A^0)} \tag{4.11}$$

は0になってしまい，交換関係を課すことができない。

さらに，これに結びついた困難が現われる。場の量子論の初等的な教科書に述べてあるとおり，運動量空間の自由場の伝播関数は，運動方程式にかかっている微分演算子のFourier 変換の逆演算子である(あるいはこれに比例する)。すなわち，自由場の Green 関数である。たとえば，スカラー場の方程式

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{4.12}$$

は運動量空間では

$$(-k^2 + m^2)\phi = 0 \tag{4.13}$$

となり，スカラー場の伝播関数は因子 i を別にして，$(k^2-m^2)^{-1}$ である。同様に，A^μ の伝播関数は式（4・9）の左辺の演算子$-k^2g^{\mu\nu}+k^\mu k^\nu$ の逆演算子であると期待される。共変性の考察から逆演算子は，$Ag_{\nu\lambda}+Bk_\nu k_\lambda$ の形を持つはずで，

$$(-k^2g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu)(Ag_{\nu\lambda} + Bk_\nu k_\lambda) = g_\lambda{}^\mu \tag{4.14}$$

が成立つ。左辺のかけ算を実行すると

$$-k^2Ag_\lambda{}^\mu - Bk^2k^\mu k_\lambda + Bk^2k^\mu k_\lambda + Ak^\mu k_\lambda = g_\lambda{}^\mu \tag{4.15}$$

となり，これをみたす A は存在しない。すなわち波動の演算子は逆を持たないのである。

もし，条件（4・7）が課せられたなら，式（4・9）から出てくるA^μの運動方程式を与える別のラグランジアンを考えれば，以上の困難は2つとも解決できることが判明する。このようなラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{4.16}$$

である。容易に検証できるように，ラグランジアン（4・16）から出る Euler–Lagrange の方程式は

$$\Box A^\mu = 0 \tag{4.17}$$

である。これから，$\Box(\partial\cdot A)=0$ であるから，$\partial\cdot A$ は質量を持たない自由

場である。電磁カレントを表わすひとつ，もしくは複数の項が式（4・16）に加わっても，もちろん差支えない。カレントが保存する限り $\partial\cdot A$ はやはり自由場を表わす。修正したラグランジアン（4・16）から，π^0 はもはや 0 ではなく

$$\pi^0 = -\partial_\mu A^\mu \tag{4.18}$$

で与えられる。さらに式（4・17）の演算子の逆は完全に定義され，単に

$$-g^{\mu\nu}/k^2 \tag{4.19}$$

となる。しかし微妙な点がひとつ残る。Lorentz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.20}$$

を実際に演算子の条件として課したとは考えることができない。それはこの条件が注意深く選んだ正準交換関係と矛盾するからである。たとえば，交換関係

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = \mathrm{i}g_\mu{}^\nu\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{4.21}$$

で，$\mu=\nu=0$ とおけば，右辺は 0 でないのに，式（4・18），（4・20）が成立てば，左辺は 0 になってしまう。

そこで，ちょっと式（4・20）に立戻ってみよう。まずはじめに，すべての成分を独立な自由度として取扱い，交換関係（4・21）および交換関係

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}, t)] = 0 \tag{4.22}$$

に基づいた A^μ のいつもの規準様式への展開を思い出そう。交換関係（4・21），（4・22）は一見したところスカラー場の交換関係（2・9），（2・10），（2・11）の然るべき拡張と見えるかもしれない。しかし実際は，重大な違いがある。交換関係（4・22）より，A_μ の空間微分どうしは同時刻で交換するから，式（4・21），（4・22）を次のように書き直すことができる。

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu(\mathbf{x}', t)] = -\mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{4.23}$$

$$[\dot{A}_\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}_\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 \tag{4.24}$$

$$[A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 \tag{4.25}$$

$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$ であることを思い起こせば，A_μ の空間成分はスカラー場の交換関係（2・9）をみたすが，$\mu=0$ の成分は“正しくない”符号を持つ。この成分は負のノルムを持つ状態に関連していることをあとで示そう。A_μ の規準様式への展開は

$$A_\mu(x) = \int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{[(2\pi)^3 2\omega]^{1/2}}\sum_{\lambda=0}^{3}[a^{(\lambda)}\epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}\epsilon_\mu{}^{(\lambda)*}(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}] \tag{4.26}$$

である［式（2・60）参照］。質量を持たない量子に対しては $\omega=|\mathbf{k}|$ である。粒子像は交換関係

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{(\lambda')\dagger}(k')] = -g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{4.27}$$

からでてくる。“正しくない”符号は $\lambda=\lambda'=0$ の場合に現われる。

偏りのベクトル $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)(\lambda=0, 1, 2, 3)$ は4個の互いに垂直な単位ベクトルの1組をなすが，そのとり方はある程度任意である。記号が明示するように，とり方は k に依存する。慣用のきめ方は，$\epsilon^{(1)}$，$\epsilon^{(2)}$，$\epsilon^{(3)}$ の時間成分が0になり，かつ $\epsilon^{(1)}$ と $\epsilon^{(2)}$ の空間成分が $\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ に垂直に，$\epsilon^{(3)}$ の空間成分が $\hat{\mathbf{k}}$ の方向にむくように選ぶ。このとき，$\epsilon^{(0)}=(1, 0, 0, 0)$となる。ベクトル $\epsilon^{(1)}$，$\epsilon^{(2)}$ は横偏極の状態，$\epsilon^{(3)}$ は縦偏極の状態を記述し，$\epsilon^{(0)}$ は“スカラー”光子の状態を表わす。

真空 $|0\rangle$ は，おそらくいかなる種類の光子も存在しない状態でなくてはならないから，

$$a^{(\lambda)}(k)|0\rangle = 0; \quad \lambda = 0, 1, 2, 3 \tag{4.28}$$

をみたすはずである。しかし，これでは，ただひとつのスカラー光子が存在する状態のノルムを計算するとき，困った事情が生ずる。このような状態は，

$$|\gamma, \lambda=0\rangle = \int d^3\mathbf{k} f(k) a^{(0)\dagger}(k)|0\rangle \tag{4.29}$$

と書かれる。波束の関数$f(k)$は2乗積分可能の条件

$$\int |f|^2 d^3\mathbf{k} < \infty \tag{4.30}$$

をみたす。式（4・27）を用いれば，状態（4・28）は次のように負のノルムを持つことがわかる。

$$\langle\gamma, \lambda=0|\gamma, \lambda=0\rangle = -\langle 0|0\rangle \int |f(k)|^2 d^3\mathbf{k} \tag{4.31}$$

ハミルトニアンは

$$H = \int d^3\mathbf{k}\omega(-g_{\lambda\lambda'}a^{(\lambda)\dagger}(k)a^{(\lambda')}(k)) \tag{4.32}$$

であるが，まったく同様にしてその $\lambda=\lambda'=0$ 部分からの寄与は正ではない。

したがって，$\lambda=0$の状態はまさしく望ましからぬものである。しかし，$\lambda=3$ の状態もそうである。というのは，既知のように自由な Maxwell 場は実

際には $\hat{\mathbf{k}}$ に垂直な2個の独立な成分しか持たないからである。古典論の場合は，この事実は Lorentz 条件（4・20）の中に単に組込まれていることが次のようにしてわかる。Lorentz 条件は A_μ を一意に決めることはできない。それは

$$\Box \chi = 0 \tag{4.33}$$

をみたす限り，ゲージ変換（4・6）が可能だからである。静止質量ゼロの粒子を記述する平面波に対して

$$\left.\begin{aligned} A_\mu(x) &= \epsilon_\mu\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k\cdot x} \quad (4.34) \\ \chi(x) &= c\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} k\cdot x} \quad (4.35) \end{aligned}\right\} k^2 = 0$$

ととり，ゲージ変換（4・6）を

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu \pm \mathrm{i} c k_\mu \tag{4.36}$$

と書く。したがって，たとえば，ϵ_0 はつねに0ととることができ，Lorentz 条件（4・20）は

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = 0 \tag{4.37}$$

となって横波の性質を表わす。

このことは，量子論でも条件（4・20）を用いて，望ましからぬ $\lambda = 0, 3$ の状態を除くことができるのではないか，と思わせる。しかしすでに，条件（4・20）は演算子の方程式と解釈すれば矛盾することを知っている。実は，条件（4・20）のように強い条件は必要としないのである。物理的な状態に望ましからぬ光子が入り込みさえしなければそれでよい。これは条件（4・20）よりも弱い条件

$$\partial_\mu A_\mu{}^{(+)}(x)\,|0\rangle = 0 \tag{4.38}$$

で達成される［Mandl（1959），Itzykson & Zuber（1980）］。これは $\partial\cdot A$ の正振動数部分（消滅演算子が伴う部分）が物理的真空に作用するときに課される条件である。展開（4・26）と，すでに述べた $\epsilon_\mu{}^{(\lambda)}$ のとり方から，条件（4・38）は

$$[a^{(0)}(k) - a^{(3)}(k)]\,|0\rangle = 0 \tag{4.39}$$

となる。この式によれば，真空はもはや単に縦光子やスカラー光子の存在しない状態ではない。実際，真空は式（4・39）で一意に確定はできない。真空は式（4・39）をみたす限り，縦光子とスカラー光子の任意の混合状態でありうる。これらの混合を変えることは，まさに A_μ にゲージ変換を行うことに相当し，したがって，物理的な意味は持たない［Mandl（1959），Izykson &

Zuber (1980)]。

許される状態では，縦光子とスカラー光子のエネルギーの和が0になる（両者が打消す）ことを，条件（4・39）が保証していることは簡単に検証できる。

$$\langle 0| -a^{(0)\dagger}a^{(0)} + a^{(3)\dagger}a^{(3)}|0\rangle$$
$$= \langle 0|(-a^{(0)\dagger} + a^{(3)\dagger})a^{(3)}|0\rangle$$
$$= 0$$

したがって，エネルギー（および運動量）の平均値は横光子のみによって決まる。

運動方程式（4・17）に由来する光子の伝播関数（4・19）は“Feynman ゲージ”にあるという。

4・2　そのほかのゲージ

ラグランジアン（4・16）は，運動方程式（4・9）に条件 $\partial \cdot A = 0$ を課したときに得られる形の運動方程式を与えることをすでに見た。Maxwell のラグランジアン（4・10）にこのような修正を加えることは，π^0 および光子の伝播関数に伴う困難を回避するために，どうしても必要と思われる。しかし，この修正は，決して難点を克服する唯一の方法ではない。実際，一般に高次のくりこみ効果は，いずれにせよ，ラグランジアン（4・16）の中の2つの項の係数を修正してしまうのである。このことは，より一般的なラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\rm em} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \tag{4.40}$$

を考察すべきことを示唆する。運動方程式は

$$\left(\Box g^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu = 0 \tag{4.41}$$

であって，$\partial \cdot A$ は依然自由な場を表わす。π^0 は

$$\pi^0 = -\frac{1}{\xi}(\partial \cdot A) \tag{4.42}$$

で与えられる。式（4・41）を運動量空間の演算子で書くと

$$\left(-k^2 g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu\right) \tag{4.43}$$

となり，その逆演算子（すなわち光子の伝播関数）は

$$(-g^{\mu\nu} + (1-\xi)k^\mu k^\nu/k^2)/k^2 \tag{4.44}$$

である。式（4・44）の中のξを含む項は“ゲージを決める”項と呼ばれる。Feynman ゲージは$\xi\to 1$で得られるが，$\xi\to\infty$の極限は存在しない（ゲージを決める項が存在しない）。もうひとつの興味あるとり方は，Landau ゲージ$\xi=0$である。このとり方では，光子の伝播関数とk^{μ}とのスカラー積はつねに0で，伝播関数はk^{μ}に垂直である。

しかし，$\xi=0$のとき，ラグランジアン（4・40）は特異点を持つ。これは，$\xi=0$のとき，伝播関数（4・44）は逆を持たないことに対応する。この特別な場合を具合よく包括するほかの定式化も可能である（中西1966, 1973, 1974；Lautrup 1967）。ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\rm em}=-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+B\partial\cdot A+\tfrac{1}{2}\xi B^2 \tag{4.45}$$

を考える。ここに$B(x)$はあるスカラー場である。このときA^0に共役な運動量は

$$\pi^0=B \tag{4.46}$$

となり，Euler–Lagrange の運動方程式はA^{μ}に対して

$$\Box A^{\mu}-\partial^{\mu}\partial_{\nu}A^{\nu}=\partial^{\mu}B \tag{4.47}$$

Bに対して

$$\partial\cdot A+\xi B=0 \tag{4.48}$$

である。式（4・48）を用いた式（4・47）からBを消去すれば，再び式（4・41）が得られる。式（4・47）から$\Box B=0$，式（4・48）から　$\Box(\partial\cdot A)=0$　がわかるから，Bも$\partial\cdot A$も自由な場である。ラグランジアン（4・45）はまた

$$\mathcal{L}_{\rm em}=-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A+\xi B)^2-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \tag{4.49}$$

とも書けることを注意しておく。結合　$C=(\partial\cdot A+\xi B)$　は簡単な Euler–Lagrange 方程式　$C=0$をみたし，分離された自由場である。

この定式化では，非物理的状態を排除する然るべき補助条件は

$$B^{(+)}(x)|0\rangle \tag{4.50}$$

である。九後および小嶋（1979）は，条件（4・50）は物理的状態の Hilbert 空間を定義するのに十分であることを証明した。

もちろん，すべての物理的結果がゲージ・パラメターξのとり方によらないことを証明しなくてはならない。これは§4・4でさらに詳しく論ずる。

この節を閉じるにあたり，ここでは共変的なゲージだけを考えてきたことを再び強調しておく。このほかに，共変的でないゲージのとり方も可能であり，

時にはかえって便利でもある。それはこの章の最後に言及するつもりである。

4・3　非可換ゲージ理論の問題点

これまでの議論をそのままラグランジアン

$$\mathcal{L}_W = -\tfrac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu} \tag{4.51}$$

に拡張することを試みよう。これは式（3・47）で導入したもので，古典的ラグランジアン（4・10）を非可換的 $SU(2)$ 群について類推した結果である。ここで $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ は，

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu\mathbf{W}^\nu - \partial^\nu\mathbf{W}^\mu - g\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}^\nu \tag{4.52}$$

で与えられることを思い出そう。再びゲージ不変性があるから，$\mathbf{W}^\mu$ を式（3・36）の形のゲージ変換によって変換する自由度が残されている。ここで，ゲージを決める手続きを考える必要がある。式（4・45）の明らかな類推と言えば，項

$$\mathbf{B}\cdot(\partial\cdot\mathbf{W}) + \tfrac{1}{2}\xi\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \tag{4.53}$$

を $\mathscr{L}_W$ につけ加えることであろう。ここに $\mathbf{B}$ は $\mathbf{W}^\mu$ と同じく，$SU(2)$ の正則表現に従って変換するものとする。式（4・53）はゲージ条件として

$$\partial\cdot\mathbf{W} + \xi\mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{4.54}$$

を与え，$\mathbf{W}_\mu(a,\ b=1,2,3)$ の運動方程式として

$$D^{ab\nu}F_{\mu\nu}{}^{b} + \partial_\mu B^a = 0 \tag{4.55}$$

を与える。式（4・55）の共変微分はもちろん，正則表現をとる場にふさわしいものである（§3・3の終りの注意4を参照)。

$$D^{ca\mu}D^{ab\nu}F_{\mu\nu}{}^{b} = 0 \tag{4.56}$$

を証明することができるが，これは

$$D^{ca\mu}\partial_\mu B^a = 0 \tag{4.57}$$

を意味する。非可換ゲージ場の場合は，補助場 $\mathbf{B}$ は自由場ではないことがわかる。したがって，$\partial\cdot\mathbf{W}$ も自由場ではない。この結果，式（4・38)，(4・50）の自明な拡張を行っても，物理的状態を定義するために用いることはできない。これらの条件の正しい一般化を見いだす問題は，長い間，非可換ゲージ理論の正準量子化の主要問題であった。

この問題を解決する機因を見いだすために，再び可換理論（QED）にたちもどる。今度はユニタリティの議論における Ward の恒等式の役割に焦点をあてよう。

4・4 ユニタリテイと Ward の恒等式：QED の閉線図形

いかめしい標題にもかかわらず，あまり形式的に整備された議論はまだ展開するつもりはない。論ずべき問題は，再び非物理的な偏りの状態を消去することであるが，今度はすこし異なる視点――ユニタリティから迫ってみることにする。すでに§4・2で，$\lambda=0$ の状態は負のノルムを持ち，したがって確率の保存について考慮せざるをえないことを述べた。この議論の一部の詳しい論述は Aitchison & Hey（1982）に与えてあるが，この節の議論の一部とも重複するのはやむをえない。

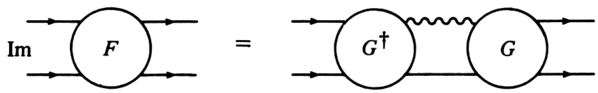


図4・1 2体→2体振幅の虚数部への寄与，中間状態に1個の光子を含む。

図4・1に示すように，ただひとつの光子を含む中間状態（この段階ではほかにどんな粒子を含むか指定する必要はない）が，その虚数部に寄与を与えるような任意の散乱振幅を考えよう。この寄与を

$$\mathrm{Im}\,\langle f|F|i\rangle=\int\sum_n\langle f|G|n\rangle\langle n|G^\dagger|i\rangle d\rho_n \tag{4.58}$$

と書くことにする。ここに，$d\rho_n$ は状態 n の相空間の要素である。1光子振幅は

$$\epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)G^\mu \tag{4.59}$$

の形を持つはずである。さて，ユニタリティ関係（4・58）の中で，光子は物理的な粒子であるから，λ の2つの値，たとえば横偏極光子に対応する $\lambda=1,2$ のみが許される。和（4・58）は，この2つの偏極状態にわたるから，添字 i, f を省略して

$$\mathrm{Im}\,F=\int G^\mu\left[\sum_{\lambda=1,2}\epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\epsilon_\nu{}^{(\lambda)}(k)\right]G^{\nu\dagger}d\rho_n \tag{4.60}$$

である。物理的な光子については $k^2=0$ であり，実数の偏極ベクトルを使うことにする。$k=(|\mathbf{k}|, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ とおけば $\epsilon^{(1)}=(0,1,0,0)$，$\epsilon^{(2)}=(0,0,1,0)$ である。

さて，たとえば図4・2の“箱形”図形のように，閉線の内部にただひとつの光子が現われるような Feynman 図形を考えよう。この種の図形は，過程 i

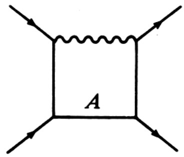


図 4・2　振幅 F に寄与する箱型図形

$\rightarrow f$ に特定の寄与をなすと考えられる。特に，中間状態に 1 個の光子と，A と呼ぶほかの 1 個の粒子が現われる場合を考えよう。ところで，解決すべき問題は次のごとくである。図 4・2 の振幅の虚数部は，これまで展開した伝播関数や頂点の規則を用いて計算したとき，実際に式（4・58）と同じ形を持っているであろうか。

ゲージを決めて Feynman ゲージで考えよう。そうすると光子の伝播関数は非常に簡単になり，

$$-g_{\mu\nu}/(k^2-\mathrm{i}\epsilon) \tag{4.61}$$

である。箱形図形の虚数部にまさに関心があるのだから，分母に無限小の虚数部を含めておいた。すべての閉線図形がそうであるように，このグラフも内線運動量 k に関する 4 次元積分を含み，虚数部は式（4・61）の $k^2=0$ の極の寄与から生ずる。虚数部を求める規則は，式（4・61）を

$$-g_{\mu\nu}\pi\delta(k^2)\theta(k_0) \tag{4.62}$$

で置き換えることである（Cutkosky，1960）。すなわち，光子は正エネルギーを持つ質量殻の上にくる。同じように，もうひとつの粒子 A も質量殻の上に乗る。この 2 つの条件から，箱形図形の k に関する積分は，$\gamma+A$ 状態の標準的な相空間積分となる。箱形図形の振幅を B と書けば，

$$\mathrm{Im}\,B=\int T^{\mu}(-g_{\mu\nu})T^{\nu\dagger}d\rho_2 \tag{4.63}$$

である。ここに，T^{μ} は図 4・3 に示すような 1 光子の脚を持つ枝線振幅で，すべての粒子は質量殻の上に乗っている。

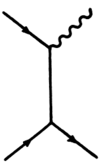


図 4・3　箱型図形の振幅 B の虚数部に入ってくる枝線図形

さて，式（4・63）は，式（4・60）と同じ一般的なみかけをしていて，結合

定数 e の最低次で式（4・60）を“証明”しているように思われる。（左辺の箱形図形は e^2 の桁で，2つの枝線図形はそれぞれ e の桁である。）しかしながら，決定的な違いがひとつある。式（4・63）に現われる光子は，式（4・62）により $k^2=0$ で正エネルギーを持つにもかかわらず，式（4・60）の光子のように完全には物理的ではないのである。§4・1に導入した偏極ベクトル ϵ を用いて，式（4・63)の中の因子 $-g_{\mu\nu}$ は光子の偏りについての和とみなしうることは容易にわかるが，この和は4つの偏極状態すべてにわたる和

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\epsilon_\nu{}^{(\lambda)}(k) = -g_{\mu\nu} \tag{4.64}$$

である。式（4・60）ではもちろん，横偏極状態 $\lambda=1$，2　だけが現われる。言うならば，式（4・60）は，$k^2=0$　のみならず，$\epsilon\cdot k=0$ をみたす光子のみを含むのである。　$k=(|\mathbf{k}|, 0, 0, |\mathbf{k}|)$　ととれば，$\epsilon_\mu{}^{(0)}(k)$　および $\epsilon_\mu{}^{(3)}(k)$ は条件 $\epsilon\cdot k=0$ をみたさない。したがって，望ましからぬ非物理的な寄与が式（4・63）の中に含まれているようである。

非物理的な寄与が問題になるかどうか調べるためには，

$$P_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\epsilon_\nu{}^{(\lambda)}(k) \tag{4.65}$$

と，式（4・64）で表わされるすべての λ の和との差が必要である。Taylor（1978)，Aitchison & Hey（1982）に論じられているように，2つの横偏極ベクトルは，直交条件

$$\epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\epsilon^{(\lambda')\mu}(k) = -\delta_{\lambda\lambda'} \tag{4.66}$$

と Lorentz 条件 $k\cdot\epsilon=0$　および $k^2=0$　だけから一意に定義することはできない。これはポテンシャルにゲージ変換を行うことがいつでもできるので，ϵ に式（4・63）のような変化を与え，しかも新しい ϵ が古い ϵ とまったく同じ条件をみたすようにすることができるからである。ϵ を一意に決めるため，さらに条件

$$t\cdot\epsilon = 0 \tag{4.67}$$

を課すことができる。　ここに t_μ はある4元定ベクトルである。そうすると $P_{\mu\nu}$ は

$$P_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} - [t^2 k_\mu k_\nu - k\cdot t(k_\mu t_\nu + k_\nu t_\mu)]/(k\cdot t)^2 \tag{4.68}$$

で与えられる。これから式（4・63）の中の望ましからぬ寄与 $-g_{\mu\nu}-P_{\mu\nu}$ は，

$$k_\mu T^\mu = 0 \tag{4.69}$$

である限り消えてしまう。

T^μ がひとつの外線光子を含む完全な振幅 G^μ に拡張されたとき，関係式（4・69）が Ward の恒等式である。その主張は，振幅 $\epsilon_\mu G^\mu$ の中で，ϵ^μ を k_μ で置き換えると結果はゼロになる，ということである。$P_{\mu\nu}$ 自身に関しては，式（4・68）の中の任意の4ベクトル t_μ に依存する部分が消えることが保証される。これは当然そうあるべきで，さもないと Lorentz 条件の共変性がおびやかされることになる。さらに，式（4・69）はより一般的な，ξ に依存する伝播関数（4・44）を用いてもよいことを示す。ξ を含む部分は単に k に比例しているからである。

今まで考察してきた"1光子"振幅に関しては，式（4・69）は実は電磁カレントの保存則にほかならないことを，次のように示すことができる（Taylor，1978）。外線光子1個を含む G^μ のタイプの振幅は，Fourier 変換

$$\int d^4x\, e^{ik\cdot x}\langle A\ \text{out}\,|j_{\text{em}}{}^\mu(x)|\,B\ \text{in}\rangle \tag{4.70}$$

に比例する。ここに，A，B は光子以外のすべての脚を表わす。部分積分により，$k_\mu G^\mu$ は発散 $\langle A\ \text{out}|\,\partial_\mu j_{\text{em}}{}^\mu(x)\,|B\ \text{in}\rangle$ に関連することになるが，これは電磁カレントの保存則から0になる。

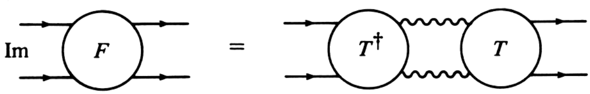


図4・4 2体→2体振幅の虚数部への寄与，中間状態に2個の光子を含む。

電磁カレントの保存則がある限り，非物理的な偏極状態はいっさい閉線図形の虚数部には現われない，と結論したくなる誘惑に駆られるが，これはいささか早計である。Taylor（1978）に従って，図4・4のような2光子状態のユニタリー和を考えよう。2つの光子の4元運動量と4元偏極ベクトルを k_1，ϵ_1；k_2，ϵ_2 で表わす。今度は ImF の中から双方の光子の偏極ベクトルの非物理的成分を消去しなくてはならない。その条件は

$$k_{1\mu}T^{\mu\nu} = k_{2\nu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{4.71}$$

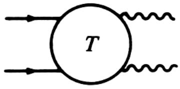


図4・5 2光子振幅

である。ここに，$T^{\mu\nu}$ は図4・5の2光子振幅であって振幅

$$\langle A \text{ out} |T(j_{\text{em}}{}^{\mu}(x)j_{\text{em}}{}^{\nu}(y))| B \text{ in}\rangle \tag{4.72}$$

の Fourier 変換に対応する。T は時間の順序づけの演算子である。式（4・71）の最初の条件を考えよう。この場合は，Taylor（1978）の指摘するとおり

$$\partial_{\mu}T(j_{\text{em}}{}^{\mu}(x)j_{\text{em}}{}^{\nu}(y)) = T(\partial_{\mu}j_{\text{em}}{}^{\mu}(x)j_{\text{em}}{}^{\nu}(y)) + \delta(x_0-y_0)[j_{\text{em}}{}^{0}(x), j_{\text{em}}{}^{\nu}(y)] \tag{4.73}$$

である*。この式の右辺第1項はたしかに電磁カレントの保存則によって消失するが，第2項はそうでない。しかしながら，この同時刻の交換子は，もしカレントが式（2・89）のようにフェルミオン場から構成されているのであれば，ゼロになる。ボソン場の場合は，交換子の中の Schwinger 項を相殺するために，いわゆる“かもめ（鷗)”項を $T^{\mu\nu}$ につけ加えなくてはならない（Jackiw 1972, なお後章§8・2を参照）。したがって，結論は，式（4・71）は QED においては成立し，非物理的な偏極状態が消えてしまうことを保証する。

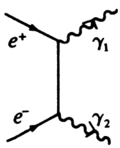


図4・6　$e^+e^- \to \gamma\gamma$ の直接過程に寄与する枝線図形

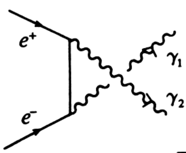


図4・7　$e^+e^- \to \gamma\gamma$ の交差過程に寄与する枝線図形

式（4・71）を1光子過程で行ったように，枝線近似で考えてみると面白い。例として，$e^+e^-\to\gamma\gamma$ の振幅をとってみよう。最低次では図4・6，4・7に示すような2つの図形がある。QED の標準的な Feynman 規則を用いて計算すると，式（4・71）は実際に2つの図形の和について成立し，どちらか一方では成立しないことがわかる（Aitchison & Hey，1982）。

4・5　非可換理論の難点

さて，以上に論じたことのどれだけが，非可換ゲージ理論にそのまま移行で

* §8・2で Ward の恒等式の詳しい議論を行うが，そこでもこれと同じような結果が導かれる。

きるであろうか。ゲージ場の量子の伝播関数は式（4・44）と同じ形を持っており，内部量子数については対角的であることを示す因子 δ^{ab} が余計につくだけである。したがって，ユニタリー和の中には非物理的な偏極状態が入ってきて，まさに同じ問題が起こってくる。しかしながら，非可換理論の場合は，新しい紛糾が加わる。これは２つの面から考察することができよう。まず第一に，カレントは§３・３の注意８で論じたように，今度は内部空間の指標を持ち，保存則が成立していても，式（4・73）に相当する非可換理論の交換子

$$\delta(x_0-y_0)[j_0{}^a(x), j_\nu{}^{b\dagger}(y)] \qquad (4.74)$$

はゼロにならない。第二に，条件（4・71）は非可換理論の場合に枝線図形のレベルで成立するかどうか，たとえば，図４・８の $q\bar{q}\to gg$ のBorn振幅で調べることができる。詳しいことは，Aitchison & Hey（1982）に論じてあるが，結果を引用すると，条件（4・71）は成立っていない。３つの図形の振幅の和に対して，ひとつのグルーオンの偏極ベクトルをその４元運動量で置き換えると，非可換理論の特有な図４・８(c)の一部がゼロにならず残ってしまい，ほかのグルーオンが横偏極をしていなければゼロにならない。しかし，図４・８から作られる１閉線の図形には，式（4・64）のように横偏極でないグルーオンが現われる。したがって，２個あるいはそれ以上の非可換ゲージ場の量子を含む閉線図形は，§３・３および§３・４のラグランジアンから帰結される枝線図形の規則に従って振幅を計算する限り，ユニタリティをこわしてしまう。

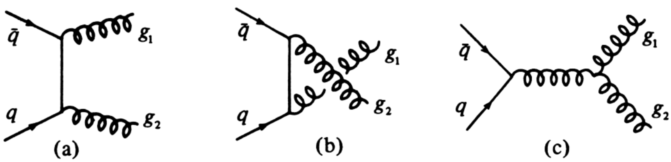


図４・８　$q\bar{q}\to gg$ 過程に寄与する枝線図形

であるから，非可換ゲージ理論の閉線図形に対する規則は一筋縄ではない。ひとつの発見法的な解決法は，ラグランジアンの中に単数または複数の付加項をもちこんで，望ましからぬ偏極状態を相殺するだけの役目を負わせることであろう。このような項の形がどうなるか，図４・９に示すグルーオンの閉線 $q\bar{q}\to gg\to q\bar{q}$ という特定の場合に，ある程度の見通しを得ることができる。この種の考察ははじめてFeynman（1963）が行い，やや詳しくAitchison & Hey（1982）の中に論じてあるが，任意の閉線図形に拡張することは難しい。

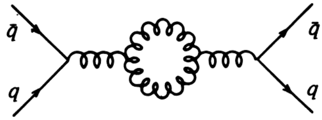


図4・9　$q\bar{q} \to q\bar{q}$ 過程に寄与するグルーオンの閉線図形

非可換ゲージ理論のユニタリティを保存する振幅を構成する正しい規則は，Faddeev & Popov（1967）によって，経路積分による量子化を用いて簡潔に導かれた*。それによれば，ある付加項を，ゲージを決めたラグランジアン（4・51）および（4・53）に足してやらなくてはならなかった。これらの項は，非常に奇妙な性質を持つ別の場を含んでいる。この場は，みかけは Lorentz スカラーであるが，フェルミオンの交換関係に従う。これは本質的に，図4・9のような図形の中の望ましからぬ残留項を相殺するために，マイナス符号を都合してこなければならないからである。このような場を“お化け”という。't Hooft（1971 a，b）によって証明されたように，お化けの寄与は確かにユニタリティを回復するが，お化けは物理的な粒子を表わしてはいない，ということを強調しておかなくてはならない。お化け項の正確な形は，ゲージの選択による。次の節で見るように，お化けの現われないゲージを選ぶこともまた，可能なのである。

経路積分の方法は，確かにゲージ諸理論の Feynman 規則に至る最も近い径ではあるが，§4・3 でふれた正準量子化の方法のほうが形式的でない取扱いにはより適している。そこでこの問題に立ちもどってみよう。

4・6　非可換ゲージ諸理論の正準量子化

ここで完璧な取扱いをめざすつもりはないが，お化け項をどのように導入するかを示そう。再び，QED から出発する。前節で QED のユニタリティを保証しているのは，Ward の恒等式（4・69）または（4・71），および多数個の光子を含む場合は，その拡張であることを学んだ。Ward の恒等式はまた，QED のくりこみ可能性の証明にも決定的な役目を果たす（第8章および Taylor，1978参照）。したがって，QED のラグランジアンのどんな特徴が Ward の恒等式を成立たせているのか調べてみることは，当然である。明らか

* Faddeev-Popov の手続きは，Abers & Lee（1973），Taylor（1978），Itzykson & Zuber（1980）などに紹介されている。

に，もし理論が変換

$$\epsilon_\mu \to \epsilon_\mu + ck_\mu \tag{4.75}$$

に対し不変であれば，

$$k_\mu G^\mu = 0 \tag{4.76}$$

が成立つ限り，$\epsilon_\mu G^\mu$ の形の振幅は変わらない。しかし，ラグランジアンが完全にゲージ不変であることは，Ward の恒等式（4・76）にとって必要であろうか。答えはおそらく否である。電磁場に対して推奨してきたラグランジアン（4・16），（4・40），（4・45）はゲージが確定しており，明らかに変換

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{4.77}$$

に対して不変ではない。真の理由は，次のとおりである。これらの QED ラグランジアンは（物質場の寄与も含んで）変換（4・77）のもとで不変ではないが，何かほかの不変性が残っていて，それが必要な Ward の恒等式を導くのに十分なのである。

§4・3にもどると，条件（4・20）は A_μ を拘束するが，一意に決定するわけではないことがわかる。A_μ が，$\partial_\mu\omega(x)$だけ変化しても，$\Box\omega=0$ である限り，$\partial\cdot A=-\xi B$ はやはり成立する。これは§4・1の式（4・33）のすぐ上の所で論じたことに対応する。したがって，式（4・45）のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial\cdot A + \tfrac{1}{2}\xi B^2 \tag{4.78}$$

は，ある制限された範囲のゲージ変換に対して不変である。ω の制約を乗数因子場 $\eta(x)$を通じて$\mathcal{L}_{\mathrm{em}}$ の中に導入すると次のようになる。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial\cdot A + \tfrac{1}{2}\xi B^2 - \eta\Box\omega \tag{4.79}$$

このとき η 場の Euler–Lagrange 方程式はまさに $\Box\omega=0$ となる。

ラグランジアン（4・79）は（無限小）変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \epsilon\partial_\mu\omega(x) \tag{4.80}$$

$$\eta(x) \to \eta(x) + \epsilon B(x) \tag{4.81}$$

$$\omega(x) \to \omega(x) \tag{4.82}$$

$$B(x) \to B(x) \tag{4.83}$$

のもとで不変である。（物質場が含まれる場合は，物質場の然るべき変換が含まれているはずである。）式（4・79）の中の $\eta-\omega$ 項は，A_μ が変換（4・80）によって変わるとき，ゲージを決める項の変化を相殺する役割を果たす。この相殺によって，ある種の“ゲージ不変性”が回復される。これは式（4・80）から式（4・83）の中に表われている。しかし，これは特別な種類の不変性で

ある。変換は x に依存しない大局的パラメター ϵ によってパラメター化されているが，式（4・80）はまた $\omega(x)$ によって局所的な性格を持っている。

式（4・80）から式（4・83）までの変換は，（可換）BRS 変換と呼ばれている（Becchi, Rouet & Stora, 1974）。$\mathscr{L}_{\mathrm{em}}$ がこれらの変換に対して不変であることを BRS 対称性という。無限小 BRS 変換に対する対称性がありさえすれば，QED の Ward の恒等式が成立つことが知られている（Brandt 1976, Levy 1979, Taylor 1978）。したがって式（4・79）は申し分のないラグランジアンである。実際は，η 場および ω 場はほかの場と結合しないから，具体的な計算ではこれらの場を無視してよい。このとき式（4・45）あるいは式（4・40）が然るべきラグランジアンになる。

非可換的な場合は，η 場と ω 場は必ずしもほかの場と結合しないわけではないことを注意しておく。結合するかしないかは選択するゲージのタイプによるのである。特に，

$$\partial \cdot A = \lambda A^2 \tag{4.84}$$

のような“非線型”のとり方をして，$\mathscr{L}_{\mathrm{em}}$ に

$$B(\partial \cdot A - \lambda A^2) + \tfrac{1}{2}\xi B^2 \tag{4.85}$$

をつけ加えると,ゲージを決定する項の第一変分として

$$\epsilon B(\Box\, \omega - 2\lambda A \cdot \partial\omega) \tag{4.86}$$

を得る（'t Hooft & Veltman 1972 b)。これは，$\eta-\omega$ 項によって相殺されるはずであるが，式（4・86）の中の $A\cdot\partial\omega$ 結合により，両者に分離されていない。以上の意味するところは次のごとくである。もし，ゲージ（4・84）を採択するならば，QED で閉線を含む Feynman 図形は，余分な“お化け”の寄与をつけ加えない限り，ユニタリティを破ってしまう。

これはもちろん，非可換的な場合に起こるはずのことであるとすでに指摘した。再び $SU(2)$ の場合を例として，以上の視点から考えてみる。ゲージを決めたラグランジアン

$$\mathcal{L}_W = -\tfrac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu} + \mathbf{B}\cdot\partial\mathbf{W} + \frac{\xi}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} \tag{4.87}$$

は，$\mathbf{W}_\mu$ が式（3・36）によって変わるとき，確かにゲージ不変ではない。そこで補助場 $\eta(x)$ と $\omega(x)$ を導入し，$\mathbf{W}_\mu$ の変換

$$\mathbf{W}_\mu(x) \to \mathbf{W}_\mu(x) + \partial_\mu\omega(x) + g\omega(x)\times\mathbf{W}_\mu(x) \tag{4.88}$$

によってゲージを決定する項に生ずる変化を打消すように選んで,縮小された

ゲージ不変性を救済することを試みる。変換（4・88）のあとでも式（4・54）が成立つためには，ωはどんな条件をみたすべきか，と考えて，η−ω項を推定することができる。必要な条件は

$$\partial^{\mu}(\partial_{\mu}\omega(x)+g\omega(x)\times \mathbf{W}_{\mu}(x))=0 \tag{4.89}$$

あるいは

$$\partial^{\mu}D_{\mu}{}^{ab}\omega^{b}(x)=0 \tag{4.90}$$

である。この場合，ωは自由場ではない。[さきほどの $U(1)$ の場合，すなわちQEDの場合と比較せよ。なお，式（4・86）のあとの注意を参照。] Yang-Mills場は自己結合を持つからである。条件（4・90）は，因子場 $\eta(x)$ を用いてラグランジアンの中に組入れられる。

$$\mathcal{L}_{W}=-\tfrac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}+\mathbf{B}\cdot\partial\mathbf{W}+\frac{\xi}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-\eta^{a}\partial^{\mu}D_{\mu}{}^{ab}\omega^{b} \tag{4.91}$$

ここで部分積分を行えば，お化けの部分は $\partial^{\mu}\eta^{a}D_{\mu}{}^{ab}\omega^{b}$ とも書くことができる。

ラグランジアン（4・91）には残りの不変性，非可換BRS対称性が残っているが，当然ながら $U(1)$ の場合よりずっと複雑である。さて，$\mathbf{W}_{\mu}$ は

$$W_{\mu}{}^{a}\to W_{\mu}{}^{a}+\epsilon D_{\mu}{}^{ab}\omega^{b} \tag{4.92}$$

のように変換すると考えよう。**B**は

$$B^{a}\to B^{a} \tag{4.93}$$

のように，ηは

$$\eta^{a}\to\eta^{a}+\epsilon B^{a} \tag{4.94}$$

のように変換する。もし式（4・82）のように $\omega^{a}\to\omega^{a}$ と変わるのであれば，ラグランジアン（4・91）の中の最後の項の変換（4・94）による変化は，実際に $\mathbf{B}\cdot\partial\mathbf{W}$ の変化と相殺する。しかしこの最後の項は（共変微係数を通じて）$\mathbf{W}_{\mu}$ も含むので，変換（4・92）による $\mathbf{W}_{\mu}$ の変化は $\mathscr{L}_{W}$ の中に相殺しきれない変化を残す。これを打消すためには，ω^{a} の自明でない変換が必要であって，

$$\omega^{a}\to\omega^{a}+\frac{\epsilon g}{2}\epsilon^{abc}\omega^{b}\omega^{c} \tag{4.95}$$

でなければならない。ωのこの変化が消えてしまわないためには，ωは自分自身と反交換しなくてはならず，またC数のパラメーターϵはωと反可換でなくてはならない。これらの条件は確かに補助場の奇妙な性質を示すにほかならないが，これらの条件があれば，ラグランジアン（4・91）はBRS変換（4・92）（4・93）（4・94）（4・95）に対して不変となる。そしてこれは必要なWard

の恒等式をすべて保証するに足る。

最後の問題は，物理的な空間の条件（4・50）を非可換の場合にどう拡張すべきか，ということである。式（4・57）の直後の議論を思い出してほしい。九後・小嶋（1979）は，これは1パラメター BRS 変換の生成演算子を用いて表わせることを示した。Q_B は変換（4・92）から(4・95)に対応する Noether カレント $j_\mu{}^B$ から決めることができる。注目すべきことには，真空を

$$Q_B|0\rangle = 0 \tag{4.96}$$

で定義することができる。九後・小嶋（1979）は，この条件は $U(1)$ の場合に条件（4・50）を再現することを示した。

ラグランジアン（4・91）から導かれるゲージ・ボソンとお化け粒子の結合（図形の頂点）の形を与え，第3章のラグランジアンから得られる簡単な頂点に何をつけ加えなければならないかを論じて，この議論を閉じることにしよう。

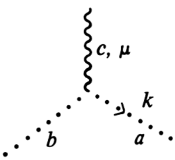


図4・10　ゲージ・ボソンとお化けのつくる頂点

図4・10 を参照すれば，$SU(2)$ のお化け頂点は，

$$-g\epsilon_{abc}k_\mu \tag{4.97}$$

である。ここに k は外に出てゆくお化けの運動量を表わす。お化けの結合は，一般に，採択されるゲージのタイプによることを納得することが重要である。't Hooft と Veltman（1972 b）は，任意のゲージに対応するお化けのラグランジアンを求める一般的処方を与えた。

参考のために，最後にふたつ，ほかの可能なゲージのとり方を論じておこう。そのひとつは，$U(1)$ の場合の非共変的 Coulomb ゲージであって，

$$\partial\cdot A-(t\cdot\partial)(t\cdot A)=0 \qquad t^2=1 \tag{4.98}$$

で定義される。もし，$t=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$ ととれば，これは $\mathrm{div}\ \mathbf{A}=0$ にもどる。必要とあれば非可換指標をつけ加えることができる。ゲージを決める項 $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})^2$ を古典的電磁ラグランジアン $\mathscr{L}_{\mathrm{em}}{}^{\mathrm{class}}$ に加えて条件（4・98）を理論にくみこんだとしても，やはり $\boldsymbol{\pi}^0=0$ となって，そのため A^μ 場に対する波動演算子は逆をもたないことになるはずである。しかしながら，$\boldsymbol{\pi}^0=0$ を受入れ（従って共変性は失われる），始めから $\mathrm{div}\ \ \mathbf{A}=0$ とおき，場の物

理的な成分にだけ量子化を行えば，このゲージで量子化を遂行することができる(たとえば Bjorken & Drell, 1965)。この場合，ベクトル粒子の伝播関数は

$$\{-g^{\mu\nu}-[k^2t^\mu t^\nu+k^\mu k^\nu-(k^\mu t^\nu+k^\nu t^\mu)]/[(k\cdot t)^2-t^2k^2]\}/k^2 \quad (4.99)$$

となる。Bjorken と Drell（1965）はまた，$-g^{\mu\nu}$ 以外の項が瞬間的な Coulomb 相互作用を打消し（カレントがいつも保存し，したがって k^μ に依存する項は消えることを前提とする限り），実効的に Feynman ゲージの伝播関数が残って，したがって，Lorentz 共変性が回復されることを示した。

もうひとつの興味ある可能性は，ゲージを決める条件として

$$-\frac{1}{2\xi}(t\cdot A)\,\Box(t\cdot A)\frac{1}{t^2} \quad (4.100)$$

を加えることである（Dokshitzer *et al.* 1980）。ここに $t^2<0$ とする。これらのゲージも Lorentz 不変性が一見して明らかという形ではない。条件が 4 元ベクトル t^μ に依存しているからである。条件（4・100）からはベクトル粒子の伝播関数

$$X^{\mu\nu}=\{-g^{\mu\nu}-[t^2(1-\xi)k^\mu k^\nu-(k\cdot t)(k^\mu t^\nu+k^\nu t^\mu)]/(k\cdot t)^2\}/k^2 \quad (4.101)$$

が出る。$\xi\neq 0$ であれば π^0 は存在し，式（4・101）の逆がとれる。$\xi=1$ の場合は“平面”ゲージと呼ぶ。

$\xi\to 0$ のとき伝播関数（4・101）は“軸性”ゲージにあるといい，

$$t_\mu X^{\mu\nu}=0 \quad (4.102)$$

をみたす。この式から予想されるように，$\xi\to 0$ のときの式（4・101）の分子は式（4・68）の $P^{\mu\nu}$ であり，したがって逆がとれない。$(k\cdot t)=0$ から生ずる特異点の解釈は Dokshitzer *et al.*（1980）が論じた。非可換の場合ですら，お化けは必要でないことが示せるので，軸性ゲージは非常に面白い。この事実は経路積分の方法を用いると最もたやすく説明できる（Itzykson & Zuber 1980, 12-2-2 節)。

5

ベクトル場の量子化 II
——質量を持つ場合

質量を持つベクトル場の量子論は，質量を持たないベクトル場の理論にくらべて格段に容易であると予想してよいかも知れない。ベクトル場のゲージ不変性を共変的に定式化するときに生ずる非物理的自由度に伴う困難は，おそらく質量を持つ場には存在しないからである。§ 3・2 で指摘したように，質量を持つ理論はゲージ不変性を持つはずはない。質量を持つ普通のベクトル場（§ 5・1 参照）に対してはまさにそうであるが，第 1 章で手短かにふれたように，質量を持つ場を含む理論はくりこみ不能であり，したがって最低次の摂動論を超えて計算することができないという不都合が生ずる。これは§ 5・2 でさらに論じよう。しかし，質量を持つベクトル場の理論のうち，くりこみ可能な特別な種類がひとつ存在するというめざましい事実がある。この理論にはゲージ対称性が存在するが，その対称性は“隠れて”いる。のちに見るように，この場合，ゲージ場は質量を獲得するが，くりこみ可能性はそこなわれない。第 7 章の GSW 理論はまさにこのタイプである。さて，質量を持つベクトル場のこの特別な種類の理論は，おそらく唯一の信用できる理論であり，質量を持たない場の理論に極めてよく似てくると予想される。これがまず質量を持たない理論を先に論じた理由である。この視点から質量を持つベクトル場の理論を論じ，第 6 章の隠れたゲージ対称性の議論へ盛上げてゆこう。

5・1　質量を持つベクトル場　(1)

質量を持たない自由なベクトル場の古典的方程式（4・9）を，質量を持つ場合に拡張するもっともらしい方法は演算子$\square$を$\square+M^2$ でおきかえることであろう。M はベクトル場の質量である。こうして波動方程式

$$(\square+M^2)B^\mu-\partial^\mu\partial_\nu B^\nu=0 \tag{5.1}$$

を得る。

ここで，B^μ を $U(1)$ 場の質量を持つ類推で扱ってゆこう。量子化を行うには，運動方程式（5・1）を与えるラグランジアンをさがす必要がある。ひとつの可能性は

$$\mathcal{L}_B = -\tfrac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B{}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}M^2 B_\mu B^\mu \tag{5.2}$$

である。ただし

$$F_{B\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{5.3}$$

とおく。

この質量項は，スカラー場のラグランジアン（2・6）にくらべて反対の符号を持っていることに注目しよう。B_μ の時間成分 $\mu=0$ は式（2・6）の質量項と反対の符号を持つが，空間成分 $\mu=1, 2, 3$ は同じ符号を持つ。

式（5・1），（5・2）には２つの基本的な要点がある。第一に，くり返しになるが，

$$B^\mu(x) \to B^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \tag{5.4}$$

のようなゲージの自由度は式(5・1)にも式(5・2)にもない。第二に，式(5・1)の発散をとると場の方程式からの結果として条件

$$\partial \cdot B = 0 \tag{5.5}$$

が得られ，この条件を付加条件として課す必要はない。（もし B^μ が保存するカレントと結合していればこうなるはずである。）これから，B^μ の４つの成分は正確にかつ“自動的”に３成分に還元される。このような理論の正準量子化になんら問題はないと考えてよい。

質量を持たない場合は，波動演算子　$\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu$　の逆演算子の存在，および条件 $\partial\cdot A=0$ と正準量子化条件の間の矛盾に難点があった。質量を持つ場合の伝播関数は，運動方程式（5・1）より，〔$(-k^2+M^2)g^{\mu\nu}+k^\mu k^\nu$〕 の逆演算子の i 倍であるはずである。この演算子が逆を持ち，それが

$$[-g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu/M^2]/(k^2 - M^2) \tag{5.6}$$

であることを証明するのは容易である。さらに，拘束条件（5・5）が正準量子化の条件と矛盾せず，量子化した場合に運動方程式とも矛盾しないことを示すことができる（Bogoliubov & Shirkov，1980）。式（5・6）から，単に $M\to 0$　とするだけでは質量を持たない場合の理論を再現することはできないことがわかる。質量を持たない場合は特異的な極限であることは，おそらくそう驚くべきことではないはずである。いずれにせよ，質量を持つ自由場は３つの独立な偏極状態を持つが，質量を持たない場は２つの独立な偏極状態しか持たな

いのである。自由度の数が変わるというような違いは，滑らかに $M \to 0$ に移行させる過程ではまず表わすことができないのである。しかしながら，実は，われわれが本当に関心を持っているタイプの質量を持つベクトル場の理論では，滑らかに $M \to 0$ の極限が存在する。これらの理論には，まさに隠れたゲージ対称性が存在するからである。

伝播演算子（5・6）で記述される簡単なベクトル理論がなぜいけないのか，その理由を知るために，ここでこの理論のくりこみ可能性およびユニタリティの制限を破る問題を手短かに考察しよう。再び，Aitchison & Hey（1982）のより詳細な議論といささか重復するところがある。

5・2 質量を持つ簡単なベクトル理論の難点

質量を持つベクトル粒子の理論は，物理的な応用としては弱い相互作用の理論（GSW 理論）に行きつくのであるから，単純な理論が難点を持つ例として，弱い相互作用の振幅を考えよう。この例はまた，第7章の GSW 理論の議論の有用な手引にもなるであろう。

次の過程を考える。

$$\nu_\mu \bar{\nu}_\mu \to W^+ W^- \tag{5.7}$$

ここに荷電 W 粒子は質量を持つベクトル粒子で，弱い力を伝達すると考えられている。この理論に依ればV－A 型の μ-ν_μ-W 結合があるから，反応(5・7)の最低次（Born 近似）の振幅は，図5・1に示すように

$$M_{\lambda_1\lambda_2} = \epsilon_\mu{}^{-(\lambda_2)*}(k_2)\epsilon_\nu{}^{+(\lambda_1)}(k_1)\bar{v}(p_2)\gamma^\mu(1-\gamma_5) \\ + \frac{\not{p}_1 - \not{k}_1 + m_\mu}{(p_1-k_1)^2 - m_\mu{}^2}\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(p_1) \tag{5.8}$$

に比例する。ここで $\epsilon^\pm$ は W 粒子の偏極ベクトルである。

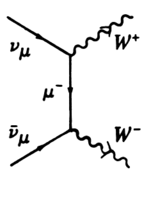


図5・1 $\nu_\mu\bar{\nu}_\mu \to W^+W^-$ 過程の μ^- 交換図形

断面積を計算するには，$|M|^2$ をつくり，それぞれの W 粒子の3つの偏極状態について和をとらなくてはならない。そのためには，光子の2つの偏極状態の和を与える式（4・64）に対応する式が必要である。今の場合，まだゲージ

変換を顧慮しなくてよいから，極めて簡単である。W粒子の静止系で，スピン1の条件

$$\partial \cdot W = 0 \tag{5.9}$$

は，3つの偏極ベクトルの時間成分が0になることを示す。[これは式（4・26）に対応する規準様式への展開を行ってみればわかる。] 3つの実直交偏極ベクトルを

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_\mu{}^{(1)} &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_\mu{}^{(2)} &= (0, 0, 1, 0) \\ \epsilon_\mu{}^{(3)} &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

ととることができる。これは§4・1と同じであるが，ここでは，$\lambda = 0$の状態は考えなくてよい。この偏極ベクトルは，静止系において，スピン1の条件 $k\cdot\epsilon^{(r)}=0$ のほかに，条件

$$\epsilon_\mu{}^{(r)}\epsilon^{(s)\mu} = -\delta_{rs} \tag{5.11}$$

をみたす。同じく静止系において

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \epsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)\epsilon_\nu{}^{(\lambda)}(k) = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M^2 \tag{5.12}$$

の関係が成立つことが容易に確かめられる。ベクトル中間子の伝播演算子（5・6）の分子がこの式と同等であることに注目せよ。さてここで，$k^\mu = (k^0,\ 0,\ 0,\ |\mathbf{k}|)$，$k^0 = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2}$ であるような系に平行移動（ブースト）すれば，$\lambda = 1, 2$ の偏極ベクトルは変わらないが，縦成分 $\lambda = 3$ は

$$\epsilon_\mu{}^{(3)}(k) = \frac{1}{M}(|\mathbf{k}|, 0, 0, k^0) \tag{5.13}$$

に変わる。この偏極ベクトルは依然，$\epsilon \cdot k = 0,\ \epsilon^2 = -1$ をみたす。

ここでは断面積の高エネルギー極限に関心があるのだから，$k_\mu k_\nu/M^2$ が主要項である。式（5・13）を

$$\epsilon_\mu{}^{(3)}(k) = \frac{k^\mu}{M} + \frac{M}{k_0 + |\mathbf{k}|}(-1, \hat{\mathbf{k}}) \tag{5.14}$$

と書直すと，偏極ベクトルの和（5・12）の中で高エネルギー領域で優勢な挙動を示すのは縦偏極であることが推定できる。これは極めて重要な点である。断面積に寄与する状態のうち縦偏極状態だけを残しておけば

$$\sum_{\text{スピン}} |M_{00}|^2 \propto \frac{E^4}{M^4}(1 - \cos^2\theta) \tag{5.15}$$

となる。ここに E は重心系のエネルギー，θ は重心系の散乱（あるいは生成）角である。すべての運動学的因子を補って書けば

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \frac{E^2}{M^4}\sin^2\theta \tag{5.16}$$

を得る（Gastmans 1975）。したがって，全断面積はエネルギーの 2 乗に比例して増加する。しかし，縦方向に偏極した W 粒子の生成は純粋に $J=1$ の反応であり（部分波分解は Gastmans 1975 を見よ），単一部分波の振幅の絶対値は 1 を超えることはできない。式（5・16）では，十分高いエネルギーでこのユニタリティの制限が破れることが明らかである。必要な因子を正しく入れると，$E \geqslant (6\pi/G_{\mathrm{F}})^{1/2}$ であればユニタリティが破れる。ここに G_{F} は Fermi の結合定数で，W-μ-ν 結合の結合定数 g と

$$G_{\mathrm{F}}/\sqrt{2} = g^2/8M_W{}^2 \tag{5.17}$$

の関係にある（第 7 章を見よ）。$(6\pi/G_{\mathrm{F}})^{1/2}$ の値はおよそ10^3 GeV である。

この段階で QED に戻り，なぜ同様な過程の Born 振幅が同様な難点をひき起さなかったのか，調べてみると有益である。QED では，このような過程は

$$e^+e^- \to \gamma\gamma \tag{5.18}$$

である。これはたまたま § 4・4 ですでに論じてあった。そこで学んだことは，光子の偏極状態の和（4・68）の中で k^μ に依存する部分は，2 つの関連する枝線図形（図 4・6 および図 4・7）の和をとるとき，効いてこないのであった。これら縦偏極部分が実際存在してはならないことは，ゲージ不変性によってわかっていたのであるが，異なる図形からの寄与が相殺するという認識は有用な情報である。

たとえば過程

$$e^+e^- \to W^+W^- \tag{5.19}$$

の振幅を考えてみよう。これは過程（5・7）と（5・18）との中間に位するような過程である。この過程は図 5・1 に対応するレプトン交換の枝線図形（図

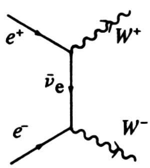


図 5・2 $e^+e^- \to W^+W^-$ 過程の $\bar{\nu}_e$ 交換図形

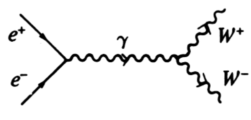


図 5・3 $e^+e^- \to W^+W^-$ 過程の 1 光子中間状態の図形

5・2）を持つ。図5・1の場合と同じく，この図形の振幅も高エネルギー領域でユニタリティを破る。ところが，過程（5・19）には，図5・3に示す1光子中間状態の枝線図形からの寄与もある。少なくとも，W粒子のひとつが縦偏極をしていれば，この図形からの寄与も高エネルギー領域でユニタリティを破る。おそらく，過程$e^+e^-\to\gamma\gamma$に起こったように，2つの枝線図形からの寄与がうまく相殺できているのであろう。もちろん，この場合は，相殺はQEDにはない類いの性格であるはずである。図5・2の弱い過程と，図5・3の電磁過程がなんらかの関係を生み出さなくてはならないからである。注目すべきことは，まさにこのような相殺がGSW理論では起こっており，弱い相互作用と電磁相互作用が関連しているのである。

さて，もとの例

$$\nu_\mu \bar{\nu}_\mu \to W^+ W^- \tag{5.20}$$

にもどろう。この場合は図5・3のような1光子を含むBorn図形はありえず，難点の回避のしようがないように思われる。しかし再び，GSW理論は逃げ道を与えている。一種の重い光子であるが弱い相互作用を持つ新しい粒子Z^0が存在する。したがって，この粒子は弱い中性カレントに関連した粒子である。これにより図5・4に示す新しいBorn図形が生じ，これが図5・1の高エネルギー領域の振舞いを正確に打消すのである。

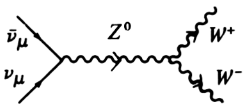


図5・4　$\nu_\mu\bar{\nu}_\mu \to W^+W^-$ 過程の Z^0 中間状態の図形

Born図形の高エネルギー領域での“悪い”振舞いを打消すことが保証されれば，質量を持つベクトル粒子の理論として受入れることができるというこの考え方の道筋は，いろいろと拡張の可能性がある。新しいレプトンを導入するGeorgi–Glashow（1972）型のモデルや，弱い中性カレントとHiggs中間子（第7章参照）を導入するGSW型のモデルがその延長上にある（Llewellyn Smith　1974）。疑いもなく啓発的ではあるが，この方法は今ではより抽象的なゲージ場の概念にくらべて深さに欠けるように思われる。相殺の機構が働く理論は，まさに隠れた対称性を含む理論なのである。

くりこみ可能性について一言加えておきたい。いままで論じてきたユニタリティの破れは，原理上，§4・4で論じたお化けの寄与とはいささか異なる。

今の場合は，摂動論は十分に高いエネルギー領域では使えなくなる，ということを示したに過ぎないとも言えるであろう。その理由は本質的に有効結合定数にある。質量をもつベクトル粒子の理論では，それは E/M に比例する。意味ありげな因子 M^{-1} は，まさに式（5・14）の縦偏極状態を通じて入ってくるのである。比 E/M は，明らかにいくらでも大きくなれる。しかし，本当にたいせつな点は，Born 図形自体がこのように高エネルギー領域で大きくなることにあるのではなく，Born 図形をその一部として含むような高次の閉線図形に対して，この大きくなり方が破滅的な効果を及ぼすからである。

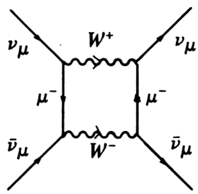


図5・5　$\nu_\mu\bar{\nu}_\mu \to \nu_\mu\bar{\nu}_\mu$ 過程に寄与する箱型図形，図5・1の枝線図形を含む。

たとえば，図5・5の箱形図形を考えてみよう。この図形はいつものように，W^+ 粒子の運動量 k についての積分を含む。図5・1の縦偏極 W^+ 粒子に対する Born 図形は高エネルギー領域で大きくなり，まさしくそれに応じて $k\to\infty$ で紫外発散を生ずるのである。この発散はくりこめない。したがって，このような理論は（現在のところ）有用とは言えない。実際，くりこみ可能な理論の Born 振幅の部分波成分はエネルギーとともに対数的に増大するが，くりこみ不能のそれは，エネルギーのある冪（べき）指数に比例して常に増大するように思われる［式（5・15）参照］。Born 図形（枝線図形）から閉線図形を考慮することは一筋縄ではゆかない。たとえば，くりこみ可能性の必要・十分条件は，寄与するすべての Born 図形の和の部分波成分が，エネルギーとともにたかだか対数的に増大することであるという主張にも，厳密な証明は欠けているようである。しかしながら，既知のすべての理論ではそうなっている。くりこみ不能な発散が相殺されれば，摂動論的な意味でいつもユニタリー性が保証されるかと言えば，これも厳密な証明はない。Llewellyn　Smith（1980）が注意したように，ある超対称的な理論では，1閉線を含む発散は，異なるスピンの粒子を含む枝線図形の間で相殺されてしまうが，明らかにこのような相殺はユニタリー性を救う役にはたたない。というのは，ユニタリー性には外場粒子の確定した1組を含む過程のみが考察されなくてはならないからである。

これに関連して特に興味ある場合は，“質量を持つ粒子の QED”，すなわち，保存するカレントと結合する質量を持つ中性のベクトル中間子の理論である。$k_1^2=k_2^2\neq 0$ ではあるが，図4・6と図4・7に対応する2つの図形は，高エネルギーの極限で相殺することが確かめられる。実は，この理論はくりこみ可能である（Matthews 1949，亀淵 1960，Salam 1960）。この結果を質量を持つ荷電ベクトル中間子に拡張しようとすると，再びこの理論の Born 図形の間で相殺のメカニズムを探さなくてはならない。ここに至って，摂動論的なユニタリー性ではなく，くりこみ可能性に問題が結びつくのである。すでに明快で権威ある文献（Llewellyn Smith 1974）があるから，この問題はこれに止め，かわりに質量を持つベクトル粒子について，縦偏極の状態を消去する手がかりを求めることにしよう。これは質量を持たない粒子の理論が示唆するところであり，質量を持つベクトル場にゲージ対称性を適用するという一見ありそうもない着想を展開する。

5・3 質量を持つベクトル場 (2)

基本的な考え方は，質量を持つベクトル場の場合をできるだけ QED に似せることである。特に，伝播関数（5・6）の中の好ましからざる部分 $k^\mu k^\nu/M^2$，あるいは同じことであるが，偏極ベクトルの和（5・12）の中の同じ項を，“ゲージ化し去る”ことができるようにしたい。質量を持たない場合（4・44）では，$\xi=1$(Feynman ゲージ）をとることでこれが達成できた。質量を持つ場合も，同様なパラメターを導入することができれば，少なくともひとつのゲージでは $k^\mu k^\nu/M^2$の項を消去する望みが持てるであろう。その上で，ある種のゲージ不変性にもとづいて，どんなゲージでもこの項は無害であるはずだ，と論ずることができるであろう。しかしながら，このようなことは望むべくもないように思われる。ラグランジアン（5・2）の中の質量項 $\frac{1}{2}M^2B_\mu B^\mu$は $U(1)$ ゲージ対称性をこわしてしまうからである。

それはそうだが，ひとつ面白半分に，質量を持つスピン1の粒子のラグランジアン（5・2）にゲージを決める項を加えたとしてみよう。これはゲージを決めた質量を持たない粒子の理論に，質量項を加えることと同じである。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}=-\tfrac{1}{4}F_{A\mu\nu}F_A^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2+\tfrac{1}{2}M^2A^\mu A_\mu \tag{5.21}$$

となり，場のテンソルは

$$F_{A\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

で定義される。ベクトル粒子の伝播関数は

$$(-k^2+M^2)g^{\mu\nu}+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k^\mu k^\nu \tag{5.22}$$

の逆として

$$\left[-g^{\mu\nu}+(1-\xi)\,\frac{k^\mu k^\nu}{k^2-\xi M^2}\right]/(k^2-M^2) \tag{5.23}$$

で与えられるであろう。この表式はまだ合法的であるとは言いがたいが，興味ある特徴を表わしていることが見てとれる。

（i）$\xi\neq\infty$であれば高エネルギー領域での振舞は悪くない。$k^\mu k^\nu$項はk^2の因子で割られているからである。

（ii）$M\to0$の極限が存在し，ゲージを決めたときの質量を持たないベクトル粒子の伝播関数（4・44）と一致する。

（iii）$\xi\to\infty$ととれば質量を持つ普通のベクトル粒子の伝播関数（5・6）を与える。

（iv）$k^2=\xi M^2$　に余分な極を持つ。

したがって，特徴（iv）を別にしては，伝播関数（5・23）は，通常の場合に滑らかにつながる一種の“混成”伝播関数として有望な形をしている。しかし，どうしてこれを合法化することができるであろうか。その答は，“隠れた対称性”あるいは“自発的な対称性の破れ”の考え方にある。正確なゲージ対称性が自発的に破れると，ゲージ場は質量を獲得するに至るのである。質量は完全に独立なパラメターではなくて，理論の荷量パラメターに比例する。質量項はラグランジアンのほかの項と結合し，場の変換によってラグランジアンをはっきりとゲージ不変な形に帰着させることができるのである。

そうなることは，質量を持つベクトル場の理論を，もともとはStuckelberg（1938）による別の形で書いてみればよくわかるであろう。再びラグランジアン（5・2）を考え，伝播関数の中の$k^\mu k^\nu/M^2$の部分を理解するために分解

$$B^\mu\equiv A^\mu-\frac{1}{M}\partial^\mu\phi \tag{5.24}$$

を導入しよう。明らかにこの分解は一意でない。場を

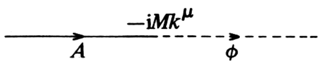
$$\left.\begin{aligned} A^\mu(x) &\to A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x) \\ \phi(x) &\to \phi(x) + M\chi(x) \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

で置換えても，B^μ に何の変化もないからである。明らかに，これはある種の局所的ゲージ変換である。少なくとも A^μ についてはそうである。ϕ 変換の解釈については§5・4で述べよう。ラグランジアンを A^μ および ϕ 場で書けば

$$\mathcal{L}_B = -\tfrac{1}{4}F_{A\mu\nu}F_A{}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}M^2 A^\mu A_\mu - M\partial^\mu\phi A_\mu + \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{5.26}$$

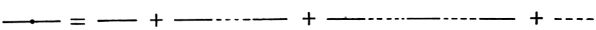
を得る。これは次のように解釈される。式（5・26）の最後の項は，質量を持たないスカラー場 ϕ を記述する。初めの2つの項は質量を持つベクトル場 A^μ を記述する。第3項は ϕ–A 結合のように見えるが，その結合定数は“A”場の質量 M に比例する。

しかしながら，この解釈が完全に正しいはずはない。ラグランジアン（5・2）と（5・26）の中の自由度の数が同じでないからである。ラグランジアン（5・2）では，質量を持つベクトル場 B^μ の3つの自由度から出発したのに，ラグランジアン（5・26）で4つの自由度（A^μ に3個，ϕ に1個）を得ることはできない。実際，式（5・26）の中の A 場は，伝播関数を計算しようとすると，質量を持つ普通のスピン1の場を記述しているのではないことがすぐわかる。伝播関数を求めるには，“混合する”項―― $M\partial^\mu\phi A_\mu$ も含めなくてはならない。この項は運動量 k^μ の伝播線に



(5.27)

の結合を生ずる。完全な伝播関数 $S^{\mu\nu}$ は級数


(5.28)

で表わされ，形式的な和は

$$S^{\mu\nu} = \frac{(g^{\mu\lambda} - k^\mu k^\lambda/M^2)}{(k^2 - M^2)}(g_\lambda{}^\nu - k^\nu k_\lambda/k^2)^{-1} \tag{5.29}$$

である。もちろん，すでに§4・1で考察したように，式（5・29）の中の逆演算子は存在しない。実は A の伝播関数は定義されない，といっても驚くことはないであろう。A^μ には，“ゲージ”自由度（5・25）があるから，QEDと同じように，然るべき A の伝播関数を得る前に A^μ のゲージを決定しなければならない，と考えられるからである。

ゲージの決定を行う特に明快な方法は，'t Hooft（1971 b）によって示された。（実は非可換ゲージの場合についてであった。§6・10参照）この場合に

その方法を適用するには，式（5・26）にゲージを決定する項　$(-1/2\xi)\times(\partial_\mu A^\mu+M\xi\phi)^2$　を加える。この項は式（5・26）の中で A -ϕ の混合を消去する項を含む。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}'_B=-\tfrac{1}{4}F_{A\mu\nu}F_A{}^{\mu\nu}+\tfrac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu$$
$$-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2+\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\tfrac{1}{2}\xi M^2\phi^2 \tag{5.30}$$

となる。この各項をどう解釈したらよいのであろうか。最初の３項はまさしく式（5・21）で表わされる特殊なラグランジアンと一致する。しかし，このラグランジアンは，質量$\sqrt{\xi}M$を持つスカラー場（最後の２項）を伴っていることがわかる。伝播関数は

$$\left[-g^{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k^\mu k^\nu}{k^2-\xi M^2}\right]/(k^2-M^2),\ (A\text{場に対して}) \tag{5.31}$$

$$(k^2-\xi M^2)^{-1},\ (\phi\text{場に対して})$$

となる。

さて，ここで一休みして，手許に集った項を調べてみよう。まず強調しておかなくてはならない点は，何はともあれ，質量を持つまったく普通のスピン１の自由粒子の理論から出発したことである。B^μ の４つの場のかわりに，（A^μ, ϕ）の５つの場を使って書直したに過ぎない。A^μ 場のみ，あるいは ϕ 場のみになんらの物理的意義も帰することはできない。これはその伝播関数の中に，非物理的な“ゲージ”パラメター ξ が表われていることから，まったく明白である。A 場の伝播関数を

$$\frac{1}{k^2-M^2}\left[-g^{\mu\nu}+\frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right]-\frac{k^\mu k^\nu}{M^2(k^2-\xi M^2)} \tag{5.32}$$

のように書いてみれば，さらにはっきり知ることができる。普通の質量を持つ粒子の伝播関数に，ξ に依存する項が加わっており，この項は，$k^2=\xi M^2$　に極を持っている。この極は，実際に ϕ の伝播線からの寄与を含めることで相殺されてしまうはずである。実際，$\xi\to\infty$ととれば，ϕ の極といっしょにこの極も消失させてしまうことができる。したがって，$\xi\to\infty$の“ゲージ”では，A^μ 場のみで物理を完全に記述できるはずである。ゲージ変換（5・25）にもどって，所与の（A^μ,ϕ）場から出発し，場 $\chi(x)$ を $-\phi/M$ に選べば，場は　$\phi'=0$，$A'^\mu=A^\mu-\partial^\mu\phi/M$　となって，まさしく初めの B^μ 場と一致することがわかる。すなわち，場 ϕ は“ゲージ化し去られた”のである。

さて，ラグランジアン（5・30）にもどる。質量を持つスピン1の特殊な伝播関数（$M\to 0$, $k\to\infty$で望ましい極限を持つ）は得られたが，余分なスカラー場ϕも入ってくるという代償があった。A^μがあるゲージ変換を受ければ，ϕも式（5・25）の変換を受ける。しかし，ϕ場が存在することによって，式（5・23）の次に掲げた（iv）の困難を除去することができるのである。伝播関数（5・31）の中で$\xi=1$ととれば，A場に対して，“Feynman”ゲージをとることになり，（$\xi=0$以外のどんなゲージでも成立つことがあるが）高エネルギー領域での振舞いがよくなって，くりこみ可能な理論になりそうに見える。$\xi=0$　ととれば，A場の伝播関数は　$k_\mu[-g_{\mu\nu}+(k^\mu k^\nu/k^2)]=0$　という意味で“純粋に横波”である。

§4・2では，質量を持つ粒子の理論における負ノルムの状態の問題を論じた。$\xi=1$ととった伝播関数（5・31）について言えば，このような寄与はg^{00}の部分（極$k^2=M^2$が負の留数を持つ）からくる。QEDでも同じことが起るが，g^{00}（スカラー光子）からの寄与はg^{33}（縦光子）からの寄与と質量殻上$k^2=0$では相殺してしまう。§4・1で見たように，スカラー光子と縦光子は条件（4・39）のおかげで互いに打消し，$k^2=0$では正ノルムの物理的状態しか残らないのである。ラグランジアン（5・30）でも，g^{00}の項は実際はϕの項と（$\xi=1$に対して$k^2=M^2$で）打消しているのである。

以上の考察は，次のようにまとめることができる。質量を持つ自由なベクトル場B^μを5成分を持つ場（A^μ,ϕ）で記述する。もちろん，3個の成分だけが独立である。A場の伝播関数，ϕ場の伝播関数は，ともにξに依存するが，もともとのB場がξによらないから全体としてはξに独立である。一般的なゲージ$\xi\neq\infty$は，“質量を持つスピン1の場（A^μ）”が，くりこみ可能になる可能性を示す。ただし，特別な結合や質量関係を持つϕ場を同時に含めなくてはならない。これらの諸関係は，いろいろなBorn項の間に相殺を起こし，無害にしてしまう。もちろん，このモデルではくりこみの現実の問題は起こらない。モデルは初めから自由場に等しいことがわかっているからである。何はともあれ，これは非常に教育的なおもちゃである。伝播関数（5・29）の形を保ったまま，何か相互作用を入れようとすると，深刻である。ここに，局所的位相不変性の自発的な対称性の破れが登場する。その準備として，式（5・29）自身が局所的ゲージ場の言葉ではどう解釈できるか調べてみよう。

5・4 A^{μ}–ϕ ラグランジアン $\mathscr{L}'_B$ の再解釈

この節の目的は，A^{μ} 場および ϕ 場に課せられる変換（5・25）の起源と解釈をより詳しく調べることである。いままで暗黙のうちにこの変換をある種のゲージ変換とみなしてきたが，これには説明を要する。実際，まず変換（5・25）は局所的ゲージ不変性のあるタイプであることを示そう。（ただし，電磁的な位相の不変性のタイプではない。）そののち，§3・2に従って，議論を反転させ，局所的ゲージ原理から A–ϕ のラグランジアンを導いてみよう。

出発点はラグランジアン

$$\mathcal{L}=\tfrac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi \tag{5.33}$$

で記述される質量のない自由なスカラー粒子という，最も簡単な空想的な場の理論である*。このラグランジアンは大局所な“平行移動”（位相の変化ではない）

$$\phi(x)\rightarrow\phi(x)+\chi \quad（大局的） \tag{5.34}$$

のもとで不変である。ここに χ は時空間の座標に依らない定数である。この対称性に対応するカレントは

$$j^{\mu}=\partial^{\mu}\phi \tag{5.35}$$

であり，運動方程式　$\Box\phi=0$　に基づいて保存則 $\partial_{\mu}j^{\mu}=0$　が成立する。

§3・2の考え方に従って，対称性（5・34）を局所的に拡張することにしよう。すなわち $\mathscr{L}$ が変換

$$\phi(x)\rightarrow\phi(x)+g\chi(x) \quad（局所的） \tag{5.36}$$

のもとで不変になることを要請する。ここで，g はのちの便宜のために導入した定数である。明らかに，ラグランジアン（5・33）は変換（5・36）のもとで不変でない。しかし，あるよく知られた変換性を持つベクトル場 A_{μ} を導入すれば不変にすることができる。変換（5・36）のもとで

$$\partial_{\mu}\phi\rightarrow\partial_{\mu}\phi+g\partial_{\mu}\chi \tag{5.37}$$

であるから，

$$A_{\mu}\rightarrow A_{\mu}+\partial_{\mu}\chi \tag{5.38}$$

のような A_{μ} を導入すれば，組合わせ

$$\partial_{\mu}\phi-gA_{\mu} \tag{5.39}$$

は変換（5・36），（5・38）のもとで不変である。したがって，ラグランジアン

---

* 以下の議論は Guralnik *et al.*（1968）の総合報告に多くを負うている。ラグランジアン（5・29）は Boulware & Gilbert（1962）によって論じられたモデルに関係している。

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi - gA_\mu)(\partial^\mu \phi - gA^\mu) - \frac{1}{4}F_{A\mu\nu}F_A{}^{\mu\nu} \tag{5.40}$$

は局所的変換（5・36）を“極小”な形で実現することになる。式（5・38）より，場 χ の次元はゼロであり，従って式（5・36）の中の g は質量の次元を持つ。$g=M$ とおけば，$\mathscr{L}_g$ は式（5・26）の $\mathscr{L}_B$ であり，変換（5・36)，（5・38）は変換（5・25）になることがわかる。さらに，$\mathscr{L}_B$ の中の A^μ について，線型の項は $-MA_\mu j^\mu$ であることも注目に値する。ここに j^μ は，もとの大局的対称性（5・34）のカレントである。

5・5　隠れた対称性の見地

A_μ-ϕ ラグランジアンの上のような“導き方”はさらに言いかえておくことができる。実は，これがより複雑な場合に用いられる言葉なのである。もともとのラグランジアン $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ は，大局的不変性（5・34）をみたしていた。しかし，これはラグランジアンの対称性ではあるが，状態空間に働くユニタリー変換ではないことに注目する必要がある。これは次のようにして知ることができる。もし，これがユニタリー変換であれば，

$$\phi'(x) = \phi(x) + \chi = U(\chi)\phi(x)U^{-1}(\chi) \tag{5.41}$$

をみたすユニタリー演算子 $U(x)$ を作ることができるはずである［式（2・32）参照］。これはエルミート生成演算子（“荷量”）R を用いて

$$U = \exp(\mathrm{i}\chi R) \tag{5.42}$$

と表わされる。R は場 ϕ の生成・消滅演算子 a，a^+ を用いて作られるはずである。この理論の真空 $|0\rangle$ は，ϕ 量子が存在しないという条件によりいつものように

$$a(k)|0\rangle = 0 \tag{5.43}$$

で定義されるであろう。したがって，R がこの空虚な空間に働けばゼロになる。あるいは真空は荷量の固有値ゼロを持つ。また同じことであるが，“荷量は真空を消滅させる”。したがって，真空は U によって不変である。

$$(|0\rangle)' = U(\chi)|0\rangle = |0\rangle \tag{5.44}$$

しかしながら，式（5・41）と式（5・44）の間には矛盾がある。明らかに

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0 \tag{5.45}$$

であるが，もし

$$\phi'(x) = \phi(x) + \chi \tag{5.46}$$

が成立てば

$$\langle 0|\phi'(x)|0\rangle = \chi \tag{5.47}$$

となる。一方，式（5・41）（5・42）からは

$$\langle 0|\phi'(x)|0\rangle = \langle 0|U(\chi)\phi(x)U^{\dagger}(\chi)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0 \tag{5.48}$$

である。ここで，R の固有値は真空に対してゼロであることを用いた。したがって，ラグランジアンは確かに対称性を持つが，それは状態の物理空間にユニタリー演算子を作用させるという操作では表わせない。この事情を，対称性が“隠れている”とか，“自発的に破れている”とか称する。次章でこの現象の詳しい議論を行う。ここではただこの特殊な対称性と関連して，ϕ 場は質量を持たないことを注意しておく。もし，この場が質量を持てば，平行移動の対称性（5・34）は“自発的”にではなくあからさまに破れていたはずである。しかし本質的な点は，質量を持たない ϕ 場が，質量を持たないゲージ場 A^{μ} と式（5・39）のように結合して，質量を持つベクトル場を作るという点にある（§5・3の終りの注意を参照）。これは決して勝手な気まぐれの現象ではなく，おそらく，自発的に破れているゲージ理論でベクトル粒子が質量を獲得することを示す最も簡単な例なのである。弱い相互作用の Glashow-Salm-Weinberg 理論でベクトル粒子が質量を獲得するのは，まさにこのように行われるのであるから，これらの概念は今や“仕事の進め方”の本質的な部分になっている。

6

場の量子論における対称性 II ——潜在的対称性

GSW 理論が隠れた局所的対称性を利用しているという事実は，すでに述べておいた。これ以外にも，素粒子物理には隠れた対称性の考え方の重要な応用がある。それは，大局的カイラル対称性の自発的破れである。（これはベクトル粒子の質量の獲得は起こさない。）したがって，ここで，大局的および局所的の双方の場合を含むかなり一般的な議論をしてみよう。のちに見るように，隠れた対称性の物理的結果は，２つの場合で全く異なっている。大局的な場合をまず論ずるが，両者に対する準備として一般的な定理から始める。

6・1 Fabri–Picasso の定理

与えられたラグランジアン$\mathscr{L}$が，保存する Noether カレント j^μ，$\partial_\mu j^\mu=0$，を伴うある１パラメター連続大局的内部対称性のもとで不変であるとしよう。この変換に対応する荷量はエルミート演算子 $Q=\int j^0 d^3x$ であり，$\dot{Q}=0$ が成立つ。今までは（それが仮定であることを強調はしつつも），この $U(1)$ 群の変換は，物理的状態の Hilbert 空間$\mathscr{H}$に働くユニタリー演算子 $U(\lambda)=e^{i\lambda Q}$ で表わせることを仮定してきた。ここに λ は任意のパラメターで，真空は U のもとで不変であるから，$Q|0\rangle=0$ である。Fabri & Picasso（1966）は，実は２つの可能性が存在することを示した。

(a)　$Q|0\rangle=0$ で，$|0\rangle$ は固有値ゼロに属する Q の固有状態

であるか，あるいは

(b)　$Q|0\rangle$ は，$\mathscr{H}$の中に存在しない（ノルムが無限大になる）

かのいずれかである。この (b) の主張はよく用いられる言い方 “$Q|0\rangle\neq 0$” あるいは “$Q|0\rangle=|0\rangle'$” より技術的に正しい言い方である。もっとも，このあとの言い方には “縮退した真空” という物理的に有用な概念が含まれている（以下を参照）。(a)の場合を，対称性が “顕れている” という。あるいは，

“Wiqner–Weyl 流に実現されている”という。(b)の場合は，対称性は“隠れている”か，あるいは“自発的に破れて”おり，または“南部–Goldstone流に実現されている”という。

この定理を証明するために，真空の行列要素$\langle 0|j_0(x)Q|0\rangle$を考えよう。ユニタリー演算子$e^{-iP\cdot x}$($P^\mu$は4元運動量演算子）で表わされる平行移動の不変性を用いると

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|j_0(x)Q|0\rangle\\
&\quad=\langle 0|\,e^{-iP\cdot x}j(0)\,e^{iP\cdot x}Q|0\rangle\\
&\quad=\langle 0|\,e^{-iP\cdot x}j(0)Q\,e^{iP\cdot x}|0\rangle
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

を得る。ここで最後の結果は

$$[Q,P^\mu]=0$$

から出るが，これはQが内部対称性だからである。真空はエネルギーも運動量もゼロの状態であるから

$$\langle 0|j_0(x)Q|0\rangle=\langle 0|j_0(0)Q|0\rangle \tag{6.2}$$

である。このことは，出発点となった行列要素はxに依らないことを示している。さて，$Q|0\rangle$のノルムを考える。

$$
\begin{aligned}
\langle 0|QQ|0\rangle&=\int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|j_0(x)Q|0\rangle\\
&=\int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|j_0(0)Q|0\rangle
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

これは，$Q|0\rangle=0$でない限り発散する。したがって，$Q|0\rangle$が無限大のノルムを持つか，真空がQによって消滅するかどちらかである。

以上の議論では，対称性とそれに関連した保存するカレントの存在を仮定した。注目すべきことは，Coleman（1966）の定理はまさにFabri–Picassoの定理の一種の“逆”を与えている。Colemanの定理は単に引用するに止めよう。ある4元ベクトル（保存するかどうかは仮定していない）の空間積分で表わされる演算子

$$Q(t)=\int j_0(x)\,d^3\mathbf{x}$$

が真空を消滅

$$Q(t)|0\rangle=0$$

させれば，実はカレントは保存する。

$\partial_\mu j^\mu = 0$

$Q(t)$は実際にはtによらず，対称性は演算子 $U = e^{i\lambda Q}$ によってユニタリー的に表わされる。

対称性をどのように表わすかという問題に決定的に関与するのは，実は真空$|0\rangle$の性質であるということは注目に値する事柄である。

6・2 Goldstone の定理

さて，Fabri–Picasso の定理の可能性(b)の場合を調べたい。(a)の場合は標準的なもので，第 2 章に論じたように，質量多重子その他周知の現象がでてくる。(b)の場合の本質的な結果は，Goldstone（1961）によって証明された。なお，Goldstone, Salam & Weinberg（1962）を参照するとよい。Goldstone は，連続変換が隠れていると［(b)の場合］，質量を持たない粒子が必ず理論の中に存在することを示した。しかし，これらの粒子が実際に観測可能か否かは，理論がゲージ場を含むか否かによる。すなわち，対称性が局所的であるか否かによる。これについては§6・4 およびそれ以後の節に議論する。ここでは，Goldstone の定理を完全に詳しく証明はしないが，主な考え方を説明するに足る導き方を示すことにする。

ラグランジアン$\mathscr{L}$が荷量Qによって生成される連続的な対称性を持つと考えよう。荷量Qは時刻によらず，Noether カレントの$\mu = 0$成分の空間積分である。

$$Q = \int j_0(x)\, d^3\mathbf{x} \tag{6.4}$$

この理論の真空が不変でない場合，すなわち，Qが真空を消滅させない場合を考察する。

この連続的な対称性のもとで不変でないある場の演算子を$\phi(y)$とし，真空期待値

$$\langle 0|[Q, \phi(y)]|0\rangle \tag{6.5}$$

を考える。Qが$|0\rangle$を消滅させるものならば，明らかにこの期待値はゼロである。この期待値がゼロにならないときの結果を調べよう。ϕはQのもとで不変でないから，式（6・5）の中の交換子は何か他の場を与える。これを$\phi'(y)$としよう。したがって，隠れた対称性のまぎれようのないしるしは，真空期待値がゼロにならないある場［ここでは$\phi'(y)$］が存在することである。

定義（6・4）より，式（6・5）を書直して

$$0 \neq \langle 0|\phi'(y)|0\rangle$$
$$= \langle 0|\left[\int d^3\mathbf{x} j_0(x), \phi(y)\right]|0\rangle \tag{6.6}$$

となる。仮定により，$\partial_\mu j^\mu = 0$　であるから，いつものように

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int d^3\mathbf{x} j_0(x) + \int d^3\mathbf{x}\ \mathrm{div}\,\mathbf{j}(x) = 0 \tag{6.7}$$

が得られ，したがって，

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|[j_0(x), \phi(y)]|0\rangle$$
$$= -\int d^3\mathbf{x}\,\langle 0|[\mathrm{div}\,\mathbf{j}(x), \phi(y)]|0\rangle$$
$$= -\int d\mathbf{S}\cdot\langle 0|[\mathbf{j}(x), \phi(y)]|0\rangle \tag{6.8}$$

が成立つ。もし式（6・8）の中の表面積分がゼロであれば，式（6・6）は x_0 によらない。しばらくこの“もし”を無視しておいて，x_0 によらないということから何がでてくるかたずねてみよう。式（6・6）の中に状態の完全系を挿入すれば，p_n を状態 $|n\rangle$ の4元運動量の固有値として平行移動の不変性を用い，

$$0 \neq \int d^3\mathbf{x} \sum_n \{\langle 0|j_0(x)|n\rangle\langle n|\phi(y)|0\rangle - \langle 0|\phi(y)|n\rangle\langle n|j_0(x)|0\rangle\}$$
$$= \int d^3\mathbf{x} \sum_n \{\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|\phi(y)|0\rangle\, e^{+ip_n\cdot x}$$
$$-\langle 0|\phi(y)|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle\, e^{\mp ip_n\cdot x}\} \tag{6.9}$$

を得る。右辺の空間積分を行えば

$$0 \neq \sum_n \delta^3(\mathbf{p}_n)[\langle 0|j_0(0)|n\rangle\langle n|\phi(y)|0\rangle\, e^{ip_{n0}x_0}$$
$$-\langle 0|\phi(y)|n\rangle\langle n|j_0(0)|0\rangle\, e^{-ip_{n0}x_0}] \tag{6.10}$$

となる。しかし，この表式は x_0 によらない。質量を持つ状態 $|n\rangle$ はあからさまに x_0 に依存する因子 $e^{\pm iM_nx_0}$（δ 関数による制約 $\mathbf{p}_n=0$ より $p_{n0}\to M_n$ である）を生ずるので，j_0 を状態 $|0\rangle$ およびこのような質量を持つ状態の間でとった行列要素は消えなくてはならない。このような状態は式（6・6）には寄与しな

い。同様に，$|n\rangle=|0\rangle$ととれば，式（6・9）は恒等的に0となる。しかし，式（6・9）は0でないと仮定されていた。したがって，$|n\rangle$ の中に $\langle 0|j_0|n\rangle\neq 0$ で，かつ表式（6・9）が x_0 によらない単数または複数のある状態が存在しなくてはならない。唯一の可能性は，その3元運動量 $\mathbf{p}_n$ とともにエネルギー p_{n0} もゼロになるような状態である。もちろん，このような状態は質量を持たない。したがって，連続的な対称性を持つ理論で，ゼロでない真空期待値が存在することは，理論が質量を持たない単数または複数の粒子を含むことを避けられないと思われる。これが Goldstone の定理である。

さて，§5・3および§5・4のモデルをこれらの言葉で解釈してみよう。大局的な連続対称性 $\phi(x)\to\phi(x)+\chi$ は“自発的に”破れている。§5・5で指摘したように$\langle 0|\phi'(x)|0\rangle\neq 0$ であるような $\phi'(x)$が存在しなくてはならないからである。質量を持たない粒子は確かに存在し，ϕ 量子そのものである。これら2つの事実は関連していることが今やわかる。また，1ϕ 粒子の状態は，$|0\rangle$ に $j_0=\dot{\phi}$ で関連している。

この結果を任意の相互作用をしている量子場に拡張するには，未解決の基本的な問題が含まれている，と言うべきであろう。多くの場合，扱っている場はあたかも古典場であるかのように考えている。しかし，（いつも行うように）ゼロでない真空期待値の存在を単に仮定することは，矛盾を起こさないかという問題が生ずる。Guralnik *et al.*（1968）は，起こさないとは限らないと結論している。§5・5の自明な場合　（$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$）は，質量を持たない粒子の存在を示し，かつ真空期待値がゼロでないことを証明することができた。しかし，のちに議論する興味ある場合では，隠れた対称性の状況は $\langle 0|\phi|0\rangle\neq 0$ になるとして単に仮定されるのである。

6・3　強磁性体

今までの議論は形式的に流れすぎたと言わざるをえない。その物理像を，より親しみやすい非相対論的な場合に例示してみると有益である。

真空状態の性質は極めて重要であることをすでに見てきた。量子場の理論において，隠れた対称性を理解する本質的な手がかりは，場の量子論の真空状態を相互作用をしている多体系の基底状態に類似したものとみなす，という南部（1960）の卓越した洞察によって与えられた。基底状態は，ラゲランジアンで指定される運動およびポテンシャル・エネルギーが与えられたとき，最低エネ

ルギーの平衡状態なのである。さて，複雑な体系（相互作用をしている複数の場はそのような一例である）の基底状態は，ラグランジアンの形から証明することが極めて難しい，思いもかけぬ性質を持つことがある。場の量子論の真空 $|0\rangle$ の性質はまさに物理的に相互作用をしている多体系（今後実際に取扱ういくつかの例をあげれば，強磁性体・超流体・超伝導体など）の基底状態の性質に類似すると（たとえまだ証明することはできないにしても）仮定することができる。

さて，量子力学では，ハミルトニアンで記述される任意の物理系の基底状態は縮退していない場合が普通である。時に，見かけ上複数の状態が同じ最低エネルギー固有値を持つ体系に出会うこともある。しかし，これらの状態のどれひとつとして真の基底状態ではない。トンネル効果がいろいろな縮退状態の間で起こり，真の基底状態はそれらのある特別な線型結合である。実際，これは空間的に有限な拡がりを持つ系で起こりうる唯一の可能性である。しかし，場の場合は，系はおそらく空間全体に拡がっているのだから，Fabri–Picasso の定理により，もうひとつの可能性がある。これは時に，“縮退した基底状態”を含むと言われる。その意味をこれから明らかにしよう。

定理の(a)の場合では，基底状態は一意である。もしいくつかの基底状態 $|0, a\rangle$，$|0, b\rangle$，……が存在し，対称性がユニタリー的に表わされるとすれば，ひとつの基底状態はほかの基底状態に

$$|0,a\rangle = e^{i\lambda Q}|0,b\rangle \tag{6.11}$$

の関係で関連しているはずである。ここに，λ はある量である。しかし(a)の場合では，荷量が基底状態を消滅させるから，すべての基底状態は実は同一である。一方，(b)の場合では，$Q|0\rangle$ がそもそも存在しないのであるから，式(6・11)のように書くことはできない。したがって，複数の縮退した基底状態が現われる可能性が生ずる。簡単なモデル［たとえば前に論じた特別に簡単な例 $\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$］では，無限大の体積の極限でこれらの別の基底状態は互いに直交する。したがって，たくさんの同等でない異なった“可能な世界”という物理像が生じてくる。それぞれの世界は，互いに直交する可能な基底状態の上にたてられている。

こういう考え方の物理的な例を，強磁性体（磁石）で説明することができる。磁石の場合は，問題の対称性は回転に対する不変性である。慣用の Heisenberg の交換型のハミルトニアン $J(\Sigma\, \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j)$ は，どんなものでも確かに

回転不変である。しかし，現実の磁石の基底状態は，Curie 温度 T_C以下ではスピンが特定の向きに並んでおり（図6・1参照），したがって，明らかに回転不変ではない。“基底状態は対称性を破る。” 実際，T_C 以下では異なる方向にスピンがいっせいに向く無数に多くの異なる基底状態がある（図6・2参照）。これらの状態は無限大の体積の極限ですべて直交する。

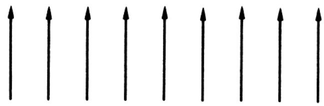


図6・1 臨界温度 T_C 以下の強磁性体の基底状態。スピンの向きがすべて揃っている。

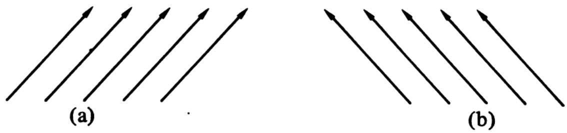


図6・2 ほかの可能な基底状態

ひとつの特定の基底状態を考えた場合“すべてのスピンの向きが揃う”というある意味では非常に対称的な状況を考えている。しかし別の意味では，これは極めて釣合いの悪い状態である。空間中でひとつの方向が選別されているからである。スピン配列のどんな可能な向きも，基底状態の配位としては同等に可能である。ひとつの方向を選べば，回転対称性が“隠れて”しまう。このようにして選ばれた基底状態からスピンを励起して作られる高次の状態は，すべてあからさまな回転対称性を失っていることに注意してほしい。

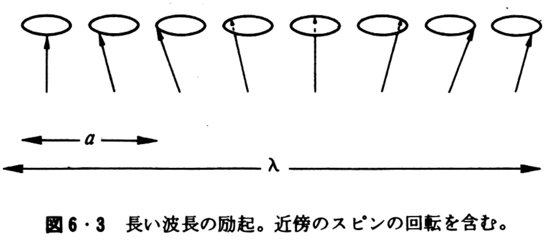


図6・3 長い波長の励起。近傍のスピンの回転を含む。

なぜこの“隠れた回転対称性”の状態が，Goldstone の定理が予言する質量のないモードを伴うのか，調べてみよう。この場合のモードとは，実はスピン波である。長い波長 λ（すなわち小さい k）のスピン波を考えよう。大きさが

$a \ll \lambda$ の領域では，磁化が特定の方向に向かう基底状態が近似的に得られる。しかしスピン波の励起の存在に対応して，λ の程度の特有な空間周期でスピンの向きは小領域から小領域へ回転している。今度は，スピン・スピン力が有限の到達距離を持つかぎり（短距離力），この励起を起こすにはほとんどエネルギーを必要としない。この場合は，十分大きい λ の値（小さい k の値）をいつも見いだして，λ の程度にわたってスピンを回転するには，ほとんど労力はいらないようにすることができる。すなわち，このモードを励起するエネルギーは，$k \to 0$ に従って 0 に近づく。スピン波の分散関係式は実際は $\omega \propto k^2$ であって，質量のない粒子に似ている。一方，長距離力が存在すると，式（6・8）の中の表面積分をゼロにしない原因となり，質量のないボソンが存在する必要はない。つまり，遠く離れているスピンの向きを相対的に回転するのにすらエネルギーが要る。この点が最も重要な点であって，それについてはのちの節でまた論ずる。

一般に，質量を持たないモードは，ひとつの真空を他の真空に重ね合わすであろうと思われるような演算子（もしそのような演算子があるとすれば！）によって生成されると考えられる。さらに正確に言えば，Goldstone の定理の議論で見たように，質量を持たないモードは，真空 $|0\rangle$ から $j_0(0)$ によってつながっている状態 $|n\rangle$ であって，$\langle 0|j_0(0)|n\rangle \neq 0$ である。

磁石は，さらに有用な物理的直観を与える。Goldstone 励起（質量を持たないモードの励起）は，秩序のパラメター（場）の時空間に依存する振動である。大局的理論におけるこのような場のゼロでない基底状態の期待値は，隠れた対称性のあり方を定義する。“大局的に”見た磁石を考えよう。磁石の全スピン・ベクトルは，基底状態でゼロでない期待値を持ち，$\langle 0|\mathbf{S}|0\rangle \neq 0$ である。これが隠れた対称性を定義する。“局所的な”観点に移って，$\langle 0|\mathbf{S}_i|0\rangle$ を考慮する。ここに $\mathbf{S}_i$ は，格子点 i におけるスピン・ベクトルである。4 次元連続体の極限では $\mathbf{S}_i$ は $\mathbf{S}(x)$，すなわち局所的な秩序のパラメターである場に移行する。$k \to 0$ とともに $\omega \to 0$ になる Goldstone モードは，この場（スピン波）の量子化された振動である。この考えは，これも“局所的”な意義を持つゲージ場を考えるときに重要になる。

ゲージ場，あるいは長距離力が存在するときに，この定理は決定的に修正されるが，その手始めとして，次に Kibble（1966）による教育的な非相対論的モデルを考察しよう。

6・4 Kibble のモデル

このモデルは，第二量子化したハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2}\int d^3x\,[\pi^2(\mathbf{x},t)+(\nabla\phi(\mathbf{x},t))^2]$$

$$+\frac{1}{2}\iint d^3x\,d^3y\,\pi(\mathbf{x},t)V(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\pi(\mathbf{y},t) \tag{6.12}$$

で定義される系である。ここに，$\pi=\dot{\phi}$ は量子化の条件

$$[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)]=i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{6.13}$$

をみたす。このハミルトニアンは明らかに変換

$$\phi(x)\to\phi(x)+\lambda \tag{6.14}$$

のもとで不変であり，したがって，§5・4のモデルと類似したものである。特に，$\langle 0|\phi|0\rangle$は変換（6・14）のもとで不変でない。運動量空間では，体積Ωの箱の中で量子化すると，ハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2\Omega}\sum_{\mathbf{k}}\{\mathbf{k}^2\phi_{\mathbf{k}}^*\phi_{\mathbf{k}}+[1+V_{\mathbf{k}}]\pi_{\mathbf{k}}^*\pi_{\mathbf{k}}\} \tag{6.15}$$

である。これは対角的だから正確に解ける。明らかに

$$\dot{\pi}_{\mathbf{k}}=-\mathbf{k}^2\phi_{\mathbf{k}} \tag{6.16}$$

$$\dot{\phi}_{\mathbf{k}}=[1+V_{\mathbf{k}}]\pi_{\mathbf{k}} \tag{6.17}$$

だから，運動方程式は

$$\ddot{\phi}_{\mathbf{k}}=-\mathbf{k}^2[1+V_{\mathbf{k}}]\phi_{\mathbf{k}} \tag{6.18}$$

となり，分散関係式はϕモードに対して

$$\omega^2=\mathbf{k}^2(1+V_{\mathbf{k}}) \tag{6.19}$$

である。さて，$k=|\mathbf{k}|\to 0$　のときの挙動を考えよう。$k\to 0$とともに$k^2V_{\mathbf{k}}\to 0$　と仮定すれば，$k\to 0$のとき$\omega\to 0$である。実は，小さいkに対して，$\omega^2=k^2$であるから，励起は質量を持たず，$E^2\propto k^2$　である。一方，$V(\mathbf{x})=g^2/|\mathbf{x}|$　の形のCoulombポテンシャルに対しては，Fourier変換は，$V_k\sim g^2/k^2$である。式（6・19）より，明らかにV_kは無次元である。したがって，gは質量Mである。この場合，$k\to 0$とともに$\omega^2\to M^2$であり，励起は質量を持つ！

この極めて簡単な例から，すでに本質的に必要な結論を引き出すことができる。

(a) $\langle 0|\phi|0\rangle\neq 0$　を与えるような自発的に破れた対称性は，質量のない励起を含むが，しかし，

(b) これは例外なく普遍的に成立つわけではない。これはむしろ力が“十分短い到達距離”を持つことによる。Kibble のモデルでは“到達距離の長い” Coulomb 力が励起に質量を生じさせた。

さて，われわれの関心の的である量子場の場合に極めてよく似ている最後の非相対論的モデルに移ろう。

6・5 Bogoliubov の超流体

第二量子化をした多体系のハミルトニアン

$$
\begin{aligned}
H = &\frac{1}{2m}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}(\nabla\psi)^\dagger\cdot\nabla\psi \\
&+\frac{1}{2}\iint \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{d}^3\mathbf{y}\,v(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\psi^\dagger(\mathbf{x})\psi^\dagger(\mathbf{y})\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) \\
&-\mu\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

を考える。ここに $\psi^\dagger(\mathbf{x})$は点 $\mathbf{x}$ にボソンを生成する演算子である。このハミルトニアンは，ポテンシャル v を通じて相互作用を行う同一種類のボーズ粒子を記述する*。演算子 $\psi(\mathbf{x})$に対する普通の正規様式の展開を体積 Ω の中で行う。

$$
\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{6.21}
$$

これは相互作用をしていない場合は通常の粒子の解釈を与える。すなわち，普通の基底状態 $|0\rangle$ は $a_{\mathbf{k}}$ 量子によって消滅する状態 $a_{\mathbf{k}}|0\rangle=0$ である。しかし，超流体の転移温度 T_{B} 以下では，$v\to 0$ の極限で真の物理的基底状態は巨視的占有状態，あるいは“Bose 凝縮系”であることが知られている。これは T_{B} 以下では，相互作用をしていない系の最低エネルギー準位（基底状態）を，全粒子数 N のかなりの部分が占めてしまうことを意味する。さらに，定量的に言えば，$T\leqslant T_{\mathrm{B}}$ では基底状態の粒子数 $N_0(T)$の全粒子数 N に対する比はよい近似

$$
\frac{N_0(T)}{N} = 1-(T/T_{\mathrm{B}})^{3/2} \tag{6.22}
$$

---

* 式（6・20）の中には化学ポテンシャル μ の項が含まれている。粒子数 N 一定という制限を μ を決めるときに課すことができる。

で与えられるというのが，統計力学［たとえば Tilly & Tilly（1974），13節を見よ］の標準的な結果である。ここで，

$$T_B \propto (N/\Omega)^{2/3} \tag{6.23}$$

である。この特徴から，超流体の基底状態を $a_{\mathbf{k}}$ 演算子を用いて定義しなおすことが必要である。その議論は次のようである。

Bogoliulov（1947）は，$N\to\infty$，$\Omega\to\infty$ の極限で，かつ $\rho=N/\Omega$ が一定の値にとどまれば，小さな v の効果は（たとえ温度がゼロでも），巨視的な数の粒子は依然運動量がゼロの基底状態に止まったまま，少数個の粒子を運動量がゼロでない状態に誘起することを示した。この場合，基底状態 $|0\rangle$ に対して，$a_0|0\rangle=0$ ととることはできない。そうすれば粒子数は N の程度の数ではなくて明らかに $\langle 0|a^{\dagger}a_0|0\rangle=0$ となってしまうからである。実際，Bogoliubov の議論によれば，a_0 と $a_0{}^{\dagger}$ をともに C 数の値 $N_0{}^{1/2}$ で実効的に置き換えることができる。大ざっぱに言えば，交換関係〔a_0，$a_0{}^{\dagger}$〕$=1$ の右辺の 1 を $a_0{}^{\dagger}a_0$ の N に比べて無視することになる。この考えを厳密に展開することは，Guralnik *et al.*（1968）を見よ。さて，この置き換えを行い，$N_0{}^2$ および N_0 の桁の項だけを残すことにすると，その結果の近似的ハミルトニアンは，Bogoliubov の擬粒子演算子 $\alpha_{\mathbf{k}}$

$$\alpha_{\mathbf{k}}=f_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}+g_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}{}^{\dagger} \tag{6.24}$$

およびこれに対応する $\alpha_{\mathbf{k}}{}^{\dagger}$ を用いて正確に対角化することができる。ここで C 数の関数 $f_{\mathbf{k}}$ および $g_{\mathbf{k}}$ は実かつ球対称で，条件

$$f_{\mathbf{k}}{}^2-g_{\mathbf{k}}{}^2=1 \tag{6.25}$$

をみたす。条件（6・25）は，演算子 $\alpha_{\mathbf{k}}$，$\alpha_{\mathbf{k}}{}^{\dagger}$ が普通のボソンの交換関係に従うことを保証する。したがって，a から α への変換は正準変換である。この定式化は，たとえば，Fetter & Walecka（1971）の第 10 章に解説されている。

われわれの目的にとって重要な点は，超流体の基底状態の定義である。擬粒子演算子は（近似的な）ハミルトニアンを正確に対角化するのだから，基底状態も擬粒子演算子で定義される。実際，“Bogoliubov” の基底状態 $|0\rangle_B$ は，

$$\text{すべての } \mathbf{k}\neq\mathbf{0} \text{ に対して } \alpha_{\mathbf{k}}|0\rangle_B=0 \tag{6.26}$$

が成立つ状態である。すなわち，運動量がゼロでない擬粒子が存在しない状態である。これはもとの $a_{\mathbf{k}}$，$a_{\mathbf{k}}{}^{\dagger}$ 演算子では複雑な状態である。実際，真の基底状態を見いだす問題の難しさと，これに対する Bogoliubov のみごとな解き方は，§6・3 で述べた相互作用をしている多体系の可能な基底状態の複雑さを

例示するに十分である。

さて，この基底状態の特別な性格を取扱うために，正規様式の展開の然るべき形を問題にしよう。a_0，$a_0{}^\dagger$ 演算子はC数として扱うことがわかっているから，

$$\psi(\mathbf{x}) = e^{i\alpha}\sqrt{\rho_0} + \chi(\mathbf{x}) \tag{6.27}$$

と書く。α は任意の位相で，ρ_0 は運動量がゼロである状態の粒子数密度である。$\chi(\mathbf{x})$を

$$\chi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} a_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{6.28}$$

と展開する。すると式（6・24）を反転して

$$a_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}} - g_{\mathbf{k}}\alpha_{-\mathbf{k}}{}^\dagger \tag{6.29}$$

が得られ，式（6・26）を用いて，$\psi(\mathbf{x})$は基底状態 $|0\rangle_B$ に対してゼロでない期待値を持つことがわかる。

$$_B\langle 0|\psi(\mathbf{x})|0\rangle_B = e^{i\alpha}\sqrt{\rho_0} \tag{6.30}$$

これは隠れた対称性に特有のしるしであって，§6・2に論じたとおりである。したがって，質量を持たないモードが存在することが期待される。

Bogoliubov の対角化は分散関係式

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + 2\rho_0 v(k)\right) \tag{6.31}$$

を生ずる。再び $k\to 0$ に従い，$v(k)$が k^{-2} より強く特異的にならなければ，$k\to 0$ とともに $\omega\to 0$ となり，質量を持たない“音響量子（フォノン）類似の”モードを生ずる。（たとえば v がほぼ一定であれば，$\omega\sim k$ である。）このタイプの励起は T_B 以下の温度で実験的に観測される。一方，$v\to k^{-2}$ であれば，$k\to 0$ とともに ω がほぼ一定になり，量子はあたかも有限の質量を持つように振舞う。ω が $k\to 0$ に対してゼロでない値をとることから，振動数のスペクトルには“ギャップ（不連続）”がある。

これらの“音響量子”は，超流体の Goldstone ボソンである。それでは，ここでどんな連続対称性が自発的に破れているのであろうかという，もっともな疑問が生ずる。答は次のとおりである。もともとのハミルトニアン H，式（6・20）は，大局的 $U(1)$ 対称性

$$\psi(\mathbf{x}) \to \psi'(\mathbf{x}) = e^{-i\theta}\,\psi(\mathbf{x}) \tag{6.32}$$

のもとで不変である。ここで，生成演算子は粒子数演算子

$$Q=\int\psi^{\dagger}\psi\ \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{6.33}$$

である。しかし，Bogoliubov の基底状態では

$${}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi(\mathbf{x})|0\rangle_{\mathrm{B}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sqrt{\rho_0}, \tag{6.34}$$

であるから，$\psi(\mathbf{x})$が式（6・32）で変換されると，明らかに

$${}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi'(\mathbf{x})|0\rangle_{\mathrm{B}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\theta)}\sqrt{\rho_0} \tag{6.35}$$

を得る。基底状態 $|0\rangle_{\mathrm{B}}$ は対称性に従わない。

以上のことを見る別の方法もある。これは有限の系に対してしか厳密にはあてはまらないが，それでも示唆するところが大きい。$U(1)$位相変換は Q によって生成され，ψ を変換するユニタリー変換は

$$\psi'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\theta}\psi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Q\theta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\psi \qquad [Q,\psi]=-\psi \text{ による} \tag{6.36}$$

であるような　$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q\theta}$　である。これから

$$\begin{aligned}{}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi'|0\rangle_{\mathrm{B}}&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,{}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi|0\rangle_{\mathrm{B}}\\&={}_{\mathrm{B}}\langle 0|U\psi U^{-1}|0\rangle_{\mathrm{B}}\neq{}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi|0\rangle_{\mathrm{B}}\end{aligned} \tag{6.37}$$

を得るから，明らかに，もし $|0\rangle_{\mathrm{B}}$ が U のもとに不変であれば［すなわち $U|0\rangle_{\mathrm{B}}=|0\rangle_{\mathrm{B}}$］，矛盾を生ずることになる。したがって，基底状態は対称性の変換に対して不変でない。（しかし $\Omega\to\infty$ となれば Q は定義できない。）実際，無限に多くの縮退した基底状態がある。ある特定の基底状態 $|\alpha\rangle$ から出発し，それが　$\langle\alpha|\psi(\mathbf{x})|\alpha\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sqrt{\rho_0}$　をみたすとする。$[U,\ H]=0$　であるから，別の基底状態として縮退した状態　$U^{-1}|\alpha\rangle$ を全く同等に考えることができる。$U^{-1}|\alpha\rangle$ は，$|\alpha\rangle$ と同じでないことはすでに見た。実際，$U^{-1}|\alpha\rangle=|\alpha-\theta\rangle$　であることは明らかである。したがって，ある基底状態に $U(1)$ 変換を施すと，もうひとつの縮退した基底状態が得られる。θ は連続的なパラメターであるから，無限に多くの基底状態がある。基底状態全体の中からどれを選んでもよい。しかし，たとえば　${}_{\mathrm{B}}\langle 0|\psi|0\rangle_{\mathrm{B}}=\sqrt{\rho_0}$（すなわち $\alpha=0$）のような状態を選べば，特定の状態を優先的に選別したことになり，すべてのほかの基底状態間との間の対称性は失われてしまう。パラメター α は異なる基底状態どうしを区別し，Goldstone の“音響量子”は実際，（ここには示さないが）局所場の変数 $\alpha(x)$の振動である（6・3 節の終りを参照）。

つけたしの議論であるが，Bogoliubov 変換を行ったとき，粒子数（ψ と $\psi^{\dagger}$ の結合）は保存しなかったことに疑念を抱くかもしれない。粒子数の演算子 Q は $\psi^{\dagger}\psi$ の空間積分であり，また翻っては空間成分が $\mathbf{j}=1/2M(\psi^{\dagger}\nabla\psi-(\nabla\psi)^{\dagger}\psi)$

（物質の流れのカレント）であるような4元カレント密度の時間成分（$\mu=0$）である。ψ 場を式（6・21）によって展開するとき，$\int\psi^\dagger\psi\, d^3\mathbf{x}$ は有限だから，大きい r に対し $j_r\sim1/r^2$ となるはずである。これは，$\partial_\mu j^\mu=0$（表面積分→0）から $\Omega\to\infty$ のとき

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$$

であることを示すのに十分である。しかし，$\int_\Omega\chi^\dagger\chi\mathrm{d}^3\mathbf{x}<\infty$ の条件のもとに展開（6・27），（6・28）を用いれば，j_r は r が大きいとき，$\sim1/r^{3/2}$ になるような部分［積 $\sqrt{\rho_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\partial x/\partial r)$］を含む。これは $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=0$ を導くのに十分でない。体積が無限に大きい極限では，“凝縮系は無限に大きい粒子数の貯水池となり，それを通じて観測される擬粒子（励起）は粒子数を交換することができる。”

最後に，$v(k)$ で k が小さくなるときの挙動にもどる。v が Coulomb 型 $v(k)\sim q^2/k^2$ であれば，

$$\omega\sim|q|\sqrt{(\rho_0/m)}\qquad（小さい\ k\ に対して）$$

となり，これはまさに“プラズマ振動数”である。この場合の擬粒子はプラズモン（プラズマ量子）である。これは，超伝導の BCS 理論の重要な一点である。Fermi 面の付近で電子の対が束縛して電荷—$2e$ のボソンが生成される。正電荷のイオンの存在のもとで，電子対の Bose 凝縮が起こる。しかし，励起のスペクトルは電子対間の Coulomb 力が主要になり，したがって，$q=|2e|$ のプラズモン様になる。さらに，分散関係式が $E=[(\hbar^2k^2)/2m]$ ではなく，$E^2=[\hbar^2k^2/2m)^2+\Delta^2]$ であるという意味で，スペクトル自身も“ギャップ”を持つ。次いで，電子対は Coulomb 力を遮蔽し，Coulomb 力は実効的に $e^{-r/a}/r$ となり，有限の到達距離を持つ。換言すれば，質量を持たない光子によって伝達される到達距離無限大の Coulomb 力は，質量 $\sim\hbar/ac$ の粒子によって伝達される到達距離有限の力になるのである。超伝導体については，後に§6・9で再びたちもどる。

この現象からの重要な教訓は，Anderson（1963）によって始めて強調された。素粒子物理では，経験的に，まず対称性が存在し，次いでそれがある程度破れている状況が知られている。この“破れ”を隠れた対称性によって解釈しようとすれば，質量を持たないスカラー（場合によっては擬スカラー）量子の存在を帰結せざるをえない。しかし，実験的にこのような粒子は少ない。一方，ずっと以前に，ゲージ量子は質量ゼロでなくてはならないから，“ゲージ原理”

は非常に優雅ではあるが，同時にまた，非常に非実用的であることを観察した。今や，長距離力の存在のもとに隠れた対称性があれば，質量を持たない Goldstone 量子は質量を獲得することを学んだ。実際，上の場合の長距離力自体がゲージ力であって，はじめは質量を持たない量子を伴っていたが，これらの粒子もまた質量を得るのである。隠れた対称性の場合は，質量ゼロのふたつの性質が“互いに打消しあってしまう”というすばらしい希望を抱いてよいように思われる。これがまさに現実の場合であって，§6・9と§6・10でさらに詳しく議論する。まず，Goldstone のもともとの古典的モデルから始めて，隠れた大局的対称性の完全に相対論的なふたつの例を議論しよう。

6・6 隠れた可換大局的対称性：Goldstone モデル

2成分スカラー場（§2・3参照）の場合

$$\phi^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{6.38}$$

を考えよう。最終的にはゲージ場を導入するが，そのとき ϕ 場は荷量を持つと解釈される。Goldstone モデルのラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu}\phi)^{\dagger}(\partial^{\mu}\phi) - V(\phi) \tag{6.39}$$

である。ここに，V（古典的ポテンシャル）は

$$V = \tfrac{1}{2}\lambda^2 |\phi|^4 - \tfrac{1}{2}\mu^2 |\phi|^2 \tag{6.40}$$

の形を持つ。［ϕ が $SU(2)$ 2重子であることを除けば式（2・93）と同じ。］さて，ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = |\dot{\phi}|^2 + |\nabla\phi|^2 + V \tag{6.41}$$

で，はじめの2つの項は明らかに自由な場の全エネルギーである。これを古典場の問題として取扱おう。隠れた対称性の見地からは，場の基底状態の配位に関心がある。

$\mathscr{H}$ の最小は明らかに

（i）ϕ ＝一定，運動エネルギーの項をゼロにする

（ii）$\phi = \phi_0, \phi_0$ は V の最小値

で起こる。(a) $\lambda^2 > 0$ であれば $\mathscr{H}$ に下限はないが，(b) $\mu^2 < 0$ であれば

$$-\tfrac{1}{2}\mu^2 |\phi|^2 \rightarrow \tfrac{1}{2}|\mu^2| |\phi|^2$$

となって，$\mathscr{L}$ は式（2・93）の通常の質量項 $-\frac{1}{2}|\mu|^2|\phi|^2$ を含む。$\mu^2 < 0$ の場

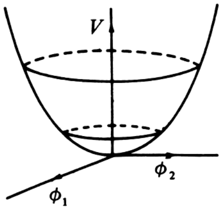


図6・4 $\mu^2<0$のとき場ϕ_1，ϕ_2の関数としてのポテンシャルVの形（式（6・40）参照）

合の粒子のスペクトル（量子論に移行するとき）は，$\mathscr{L}$の自由場の部分を見ればわかる（おそらく粒子は漸近的状態で定義される）。いまの場合は$\mu^2<0$であるから，Vの形は図6・4に示したものとなり，$\phi=\phi_0=0$ に最小を持つ。場の量子論ではϕを最小値のまわりにいつものように展開し

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\mathbf{k}}\left(a_{\mathbf{k}+}e^{-ik\cdot x}+a_{\mathbf{k}-}^{\dagger}e^{ik\cdot x}\right) \tag{6.42}$$

となる。ここに，$a_{\pm}^{\dagger}=(1/\sqrt{2})(a_1^{\dagger}\pm ia_2^{\dagger})$ であり，基底状態（真空）$|0\rangle$は

$$a_+|0\rangle=a_-|0\rangle=0 \tag{6.43}$$

で定義される。明らかに，$\langle 0|\phi|0\rangle=0$である。

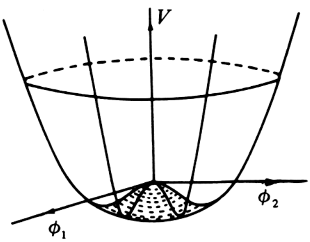


図6・5 $\mu^2>0$のときのVの形

さて，$\mu^2>0$ の場合を考えよう。Vは図6・5に示すように，無数の論文を輩出させた例の形を持っている。Vは$\phi=0$に極大を持ち，円 $\phi_1{}^2+\phi_2{}^2=\mu^2/\lambda^2$ に沿って極小を持っている。μ^2は質量項ではないが，隠れた対称性の状況が起きていることを示そう。実際，ポテンシャル（6・40）は$\mu^2>0$ のとき，まさに2次相転移のLandau（1937 a，1937 b）の“平均場の理論”におけるHelmholtzの自由エネルギーの形をしている。たとえば，$|\phi|$は強磁性のxで平均した磁化であってよい。このときμ^2は温度に依存する量である。強磁性の転移温度T_C以上では，実効ポテンシャルは図6・4の形を持ち，原点に極小だけを持つ（$\mu^2<0$）。しかし，T_C以下ではポテンシャルは図6・5の形を持ち，磁化はゼロでなくなる（$\mu^2>0$）。μ^2は（T_C-T）に比例し，T

$<T_C$ では正である。このため，“状況”のかわりに“相”という言葉を用い，“隠れた対称性の相”と呼ぶ。場の量子論の場合にもどると，$\mu^2>0$ の場合の V のこの物理像は，基底状態（場の理論の真空）は $\phi=0$ に対応するのではなく，$|\phi|=$一定$=(\mu^2/2\lambda^2)^{1/2}$ に対応する諸状態であるべしと示唆する。すなわち，真空はたとえば

$$_B\langle\omega|\phi|\omega\rangle_B=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega}|\mu|/|\lambda|=\frac{e^{i\omega}}{\sqrt{2}}f \tag{6.44}$$

のような真空 $|\omega\rangle_B$（B は破れた対称性の意味）であるはずである。ここで ω はある位相角を表わす。$_B\langle\omega|\phi|\omega\rangle_B$ がゼロでないことは言うまでもあるまい。隠れた対称性の相を出現させようとしているので，質量を持たないボソンの存在が期待される。

さらに先へ進む前に一言すると，真空の本質に関する以上の議論は古典場ならば正しいが，本式の場の量子論の場合は状況はそれほど明白ではないことも事実である。ラグランジアン（6・39）で $\mu^2>0$ であれば，実はこの $|\omega\rangle_B$ 状態が真空であって，$_B\langle\omega|\phi|\omega\rangle_B\neq0$ が矛盾を起こさないという厳密な証明は，まだされていないようである。これは仮定として受取らなくてはならない。

再び，どんな対称性が存在し，それが自発的に破れているのか調べてみよう。$\mathscr{L}$ は大局的 $U(1)$ 対称性

$$\phi\to e^{-i\alpha}\phi,\quad \alpha \text{ は定数} \tag{6.45}$$

に従う。$\langle0|\phi|0\rangle=0(\mu^2<0)$ の場合は，もし $\phi'=e^{-i\alpha}\phi$ であれば，明らかにまた $\langle0|\phi'|0\rangle=0$ であり，$|0\rangle$ は確かに式（6・45）を尊重する。しかし，$\mu^2>0$ の場合は，$_B\langle\omega|\phi|\omega\rangle_B$ に対して式（6・44）が成立ち，明らかに

$$_B\langle\omega|\phi'|\omega\rangle_B=\frac{1}{\sqrt{2}}f\,e^{i(\omega-\alpha)}\neq{}_B\langle\omega|\phi|\omega\rangle_B \tag{6.46}$$

だから，“$|\omega\rangle_B$ は $U(1)$ 変換のもとで不変でない”。（あまり厳密でなく言えば，いつものように $\Omega\to\infty$ で荷量は実は存在しない。）再び，$|\omega\rangle_B$ 状態は無限にあって，式（6・44）の位相パラメター ω で区別される。図 6・5 より，円 $|\phi|^2=f^2/2$ の上の任意の点がそれで，いろいろな真空を $|\omega\rangle_B$ と名づけるわけである。理論をたてるためには，どれかひとつの真空を選び出さなくてはならないが，このとき $U(1)$ 位相対称性は破られるのである。

たとえば，$\omega=0$ と真空をひとつ選ぶと，次の問題は粒子のスペクトルを見いだすことである。そのため，$\mathscr{L}$ の自由粒子の部分を見ると，$\mu^2>0$ の場

合は，$\frac{1}{2}\mu^2|\phi|^2$ の項が質量を表わすと言うことはできない。符号が違うからである。もし，この項を相互作用［自由粒子の部分を $(\partial_\mu\phi)^\dagger\partial^\mu\phi$ として］と言うならば，ϕ を式（6・21）のように展開して，$a|0\rangle=0$ ととれば，単に質量のない粒子の真空が $\langle 0|\phi|0\rangle=0$ であるような理論を得るにすぎない。そうではなくて，少なくとも解ける（ある近似では）問題である超流体との類推をとって考え，どうするのが合理的かという道しるべとすることができる。$\omega=0$ という値を選んで，$|0\rangle_B$ を定義すると，$\omega=0$ は $\phi_1{}^2+\phi_2{}^2=f^2$ の上の極小 $\phi_1=f$, $\phi_2=0$ に対応するから，

$$\phi_1=f+\chi_1, \phi_2=\chi_2 \tag{6.47}$$

と書くことができる。この極小点のまわりの微小振動を探すと，その量子が物理的に関心のある粒子である。このとき

$$_B\langle 0|\phi_1|0\rangle_B=f,\ _B\langle 0|\chi_1|0\rangle_B=0 \tag{6.48}$$

および

$$_B\langle 0|\phi_2|0\rangle_B=\ _B\langle 0|\chi_2|0\rangle_B=0 \tag{6.49}$$

であることが期待される。式（6・47）を用いると式（6・39）は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\left(\tfrac{1}{2}\partial_\mu\chi_1\partial^\mu\chi_1-\tfrac{1}{2}\mu^2\chi_1{}^2\right)+\tfrac{1}{2}\partial_\mu\chi_2\partial^\mu\chi_2\\&-\tfrac{1}{2}|\mu|\lambda\chi_1(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)-\tfrac{1}{8}\lambda^2(\chi_1{}^2+\chi_2{}^2)^2+\mu^4/8\lambda^2\end{aligned} \tag{6.50}$$

となる。定数項は無視し，この式の残りの部分を次のように解釈することができる。自由場の部分は，質量 μ の場 χ_1 と質量を持たない場 χ_2 を記述していると解釈できることは容易にわかる。大局的 $U(1)$ 対称性は自発的に破れ，質量を持たない Goldstone ボソンがひとつ現われる。χ_1 は V の極小点として選んだ点のまわりの“動径方向の振動”に対応し，一方 χ_2 は“円のまわりの”振動数ゼロの運動に対応する。すなわち，いろいろな極小を区別する位相角の局所的振動に関連したモードに対応する。

式（6・50）の $\mathscr{L}(\chi_1,\ \chi_2)$ は，

$$\chi_1\to\chi_1'=\cos\alpha\,\chi_1-\sin\alpha\,\chi_2\ \text{など} \tag{6.51}$$

のようなどんな素朴な変換に対しても，$U(1)$ 対称ではない。もちろん，$\mathscr{L}$ は変換

$$(f+\chi_1+i\chi_2)\to(f+\chi_1+i\chi_2)'=e^{-i\alpha}(f+\chi_1+i\chi_2) \tag{6.52}$$

に対しては不変である。これは，$\mathscr{L}$ のもともとの大局的不変性であったからである。かくて，$\mathscr{L}(\chi_1,\ \chi_2)$ は，$\mu^2>0$ の場合に物理的に簡単に解釈できるが，対称性は“隠れている”。実際，対称性は理論のいろいろなパラメターの間の

特殊の関係として，その存在を露わにするのである。ラグランジアン（6・50）の中には3点相互作用，4点相互作用および質量 μ が入っているが，最終的にはただ2つの独立なパラメター λ, μ しかない。

$U(1)$ 不変性に対応するカレントは

$$j_\mu = \mathrm{i}(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi)^\dagger \phi) = \phi_2 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2 \tag{6.53}$$

である。χ_1，χ_2 の場を用いると

$$j_\mu = \chi_2 \partial_\mu \chi_1 - \chi_1 \partial_\mu \chi_2 - f \partial_\mu \chi_2 \tag{6.54}$$

であるから

$$_{\mathrm{B}}\langle 0 | j_0(0) | n \rangle_{\mathrm{B}} \neq 0 \tag{6.55}$$

が成立つ。ここに $|n\rangle$ は運動量 P_n のひとつの χ_2 量子の存在する状態である。（§6・2参照）。一般に自発的に破れている対称性のカレントは，ゼロでない真空の値 f に比例する強さで真空を Goldstone 状態に結びつける。

この節を終える前に，決定的に重要な段階である式（6・47）の物理をもう少し論ずる値打があると思う。

$|0\rangle_{\mathrm{B}}$ は量子 ϕ_1 で考えると極めて独特な状態であるが，もちろん量子 χ_1 では極めて簡単な状態である。ある意味では“もともとの”量子 ϕ_1 を多体系の物質粒子であるかのようにみなすことができる。一方，物理的に最も興味あるのはこれらの粒子ではなくて，χ_1 場の量子である（隠れた対称性の相転移点以下において）。超流動や強磁性とまさに同じように，字義どおり相転移の物理像を論じているのだ，と考えることができよう。おそらく，宇宙の極めて初期の段階では，温度は転移点以上であって，あからさまな対称性の相が起こっていたと考えることができよう。現在のいろいろな不均衡な状態は，宇宙が冷えるに従って生じてきたのであろう。このことは現象論的には温度に依存するパラメター μ^2 によって表わされているのであろう。

次に，以上の議論を非可換大局的対称性に拡張しよう。

6・7　隠れた非可換大局的対称性

ラグランジアン（2・93）で μ^2 項の符号を変えたもの

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + \tfrac{1}{2}\mu^2 \phi^\dagger \phi - \tfrac{1}{2}\lambda^2 (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{6.56}$$

を考えると，非可換大局的対称性の本質的な特徴を例示し，さらに GSW 理論への道を準備することができる。ここに

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

は $SU(2)$ 2重子である。ポテンシャルの極小は

$$(\phi^\dagger\phi)_0=\mu^2/2\lambda^2 \tag{6.57}$$

でおこる。さて“$\langle 0|\phi|0\rangle\neq 0$ の条件”の一般化が必要である。ϕ は4つの実数場を含み，また§3・3の終りの注意6で述べたように，式（6・56）は大局的 $U(1)$ 位相群および大局的 $SU(2)$ 群のもとに不変であるから，4個の生成演算子が働く。式（6・56）の完全な対称群 G は $SU(2)\times U(1)$ である。このやや複雑な非可換対称群の場合は，次の定性的に新しい特徴が起こりうる。選択した条件 $\langle 0|\phi_i|0\rangle\neq 0$（$i$ は G のもとに変換する場の成分）は，G の変換のある部分集合のもとに不変になることがある。これは，実質的にこの真空が部分集合の対称性を尊重し，この特別な荷量（またはカレント）に対応する質量のない Goldstone ボソンが存在しないことを意味するのであろう。$\langle 0|\phi_i|0\rangle$ を不変にしないようなそれぞれの区別できる変換に関連してのみ，質量のない Goldstone ボソンが存在するのである。

ここに Taylor（1978）の与えた議論を再現してみる。ϕ を実の r 成分を持つ G の表現とし，$\langle 0|\phi_i|0\rangle=F_i$ であるとしよう。この表現で生成演算子 Q^α（$\alpha=1$，……，N）は $\mathrm{i}v^\alpha$ で表わされる。それぞれの v^α は実の反対称 $r\times r$ 行列である。ベクトル $v_{ij}{}^\alpha F_j$（$\alpha=1$，……，N）は，次元 $n\leqq r-1$ の部分空間を張る。明らかに $F_i v_{ij}{}^\alpha F_j=0$ なので，部分空間のすべてのベクトルは $\mathbf{F}$ に直交するからである。ポテンシャル V は ϕ_i の関数で，

$$\phi_i\to\phi_i'=(\delta_{ij}+\epsilon^\alpha v_{ij}{}^\alpha)\phi_j \tag{6.58}$$

の変換に対して不変である。したがって，$\delta(V)=0$ は

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}v_{ij}{}^\alpha\phi_j=0 \tag{6.59}$$

を与える。破れた対称性の基底状態の条件として，$(\partial V/\partial\phi)_{\phi=\mathbf{F}}$ をとる。式（6・59）を微分すると

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_k\partial\phi_i}\right)_{\phi=\mathbf{F}}v_{ij}{}^\alpha F_j=0 \tag{6.60}$$

を得る。括弧の中の因子は，ϕ 場の質量行列で，式（6・60）はこの因子が n 次元部分空間 $v^\alpha F$ のすべてのベクトルを消滅させることを表わす。したがって，質量行列は n 個のゼロ固有値を持つ。換言すれば n 個の Goldstone ボソンが存

在する。ϕ_i のうちのほかの $r-n$ 個のスカラーは，一般に質量を持つ。

この状況を見るもうひとつの方法は，G の何かある単数または複数の生成演算子，あるいはその線型結合に対応する単数または複数の行列 $c^\alpha v^\alpha$ が F を消滅させるようになっているかどうかみればよい。たとえば，何かある特別の α に対して　$v^\alpha F=0$　であるとしよう。すると G のこの特別の変換に対して，$\delta\phi=[Q^\alpha,\phi]=v^\alpha\phi$ ［式（2・81）参照］で，したがって，$\langle 0|\delta\phi|0\rangle=v^\alpha F=0$　である。換言すれば，G のこの特別な部分に対して，$\langle 0|\phi|0\rangle=\mathbf{F}$　は不変である。$\langle 0|\phi|0\rangle=\mathbf{F}$　を不変にする G の部分を，G の中の F の“リトル・グループ”と呼ぶ。このような生成演算子に対して，$|0\rangle$ は対称性を破らず，それに対して Goldstone 現象は起こらないと期待される。

実例でもってこのことを明らかにしよう。ϕ を $SU(2)$ のアイソベクトルとし，その3次元表現を

$$(v^\alpha)_{ij}=-\epsilon_{\alpha ij} \tag{6.61}$$

［式（2・76）参照］とする。$\mathbf{F}$ をアイソベクトル（1, 1, 1)とすれば，ベクトル $v^\alpha F$ は

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \tag{6.62}$$

である。これは明らかに2次元部分空間を張る（$n=2$, $r=3$)。条件

$$\langle 0|\phi|0\rangle=\mathbf{F} \tag{6.63}$$

は不変に保たれ，幾何学的には方向，$\mathbf{n}=$（1, 1, 1)のまわりの回転である。もちろん

$$n^\alpha v^\alpha=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix} \tag{6.64}$$

が $\mathbf{F}$ に作用すればゼロを与えることは容易に検証することができる。式（6・64）は単に方向 $\mathbf{n}$ のまわりの回転に対応するだけである。条件（6・63）は，ϕ の2つの成分は質量を持たない Goldstone 粒子であり，$\mathbf{n}$ のまわりの回転対称性が破れていないことに対応して1つの成分は質量を持つことを示す。

それでは，ラグランジアン（6・56）の中で，いま調べようとして選び出したアイソ2重子の場 ϕ に，どんな条件を課すことができるであろうか。(一方では，電・弱相互作用への応用に目をつけている。）大局的なアイソスピンの

“座標系”と，もうひとつの大局的 $U(1)$ 変換に関連した位相の自由度とを選ぶことにより，アイソ２重子 ϕ に対して，$\langle 0|\phi|0\rangle$ を常に

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ f/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

の形にとることができる。ここで，前と同じように $f=|\mu|/|\lambda|$ である。絵に描いてみれば，状況は図６・６（Miani 1976）のように表わされる。時空間の点のそれぞれに，座標によらない $\langle 0|\phi|0\rangle$ のゼロでない値が存在し，その値は“内部的”な軸を整列することによって，式（6・65）の“アイソスピン下向き”の形にとることができる。このような条件は実際，全 $SU(2)\times U(1)$ 対称性を破らないことに注意しよう。この２次元表現では，生成演算子の結合 $\frac{1}{2}(1+\tau_3)$ が存在して，これは式（6・65）の右辺（前の“F”）を消滅させるからである。ほかの生成演算子 $\frac{1}{2}(1-\tau_3)$, $\tau_1/2$, $\tau_2/2$ は式（6・65）を消滅させ

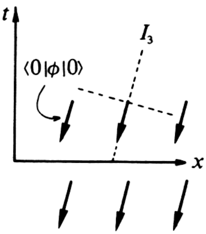


図６・６ 矢印は“内部”空間（アイソスピン空間，時空間ではない）における $\langle 0|\phi|0\rangle$ の方向を表わす。この方向はすべての時空点で同じである。点線は内部空間の軸を表わす。

ない。したがって，全体の群のこの部分は破れている。であるから，極小点（6・65）のまわりに展開するとき，質量を持つスカラー場１つと，質量を持たないスカラー場３つが生じてくることが期待される。さらに，§６・10で見るように，非可換ゲージ場を含んで対称性を局所的にすれば，３つの質量を持つベクトル粒子（質量を持たない Goldstone 粒子をその縦成分として“呑みこんで”しまったもの）と，１つの質量を持たないベクトル粒子が生じてくる。もちろん，これは物理的に解釈すれば GSW 理論の３つのベクトル・ボソン $W^{\pm}$, Z^0 と通常の光子である。

条件（6・65）で選んだ極小点のまわりの微小振動を調べるために，$\phi=\langle 0|\phi|0\rangle+\phi'$ とおき，ϕ' の量子を粒子と解釈する必要がある。$\langle 0|\phi|0\rangle$ はアイソスピノルの構造

$$\begin{pmatrix} (0,0) \\ (f/\sqrt{2},0) \end{pmatrix} \tag{6.66}$$

を持つ。一方，$\boldsymbol{\phi}$ は2つの複素場を含み一般的な形

$$\begin{pmatrix}(\phi_1+\mathrm{i}\phi_2)/\sqrt{2}\\(\phi_3+\mathrm{i}\phi_4)/\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{6.67}$$

を持つ。ここで

$$\boldsymbol{\phi}=\langle 0|\boldsymbol{\phi}|0\rangle+\boldsymbol{\phi}' \tag{6.68}$$

と書き $\boldsymbol{\phi}'$ を

$$\boldsymbol{\phi}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_2'+\mathrm{i}\phi_1'\\\chi'-\mathrm{i}\phi_3'\end{pmatrix} \tag{6.69}$$

とおく。（記法の要点は§6・10でこの対称性を局所的にしたとき明らかになるであろう。）式（6・68），（6・66），（6・69）を式（6・56）に代入し，質量スペクトルを調べるために2次の項までをとる。まことに注目すべきことには（もっとも一般論の解析から期待されるのであるが），3つの場 $\boldsymbol{\phi}'$ は質量を持たず，一方，χ' は質量 μ を持つ。$\boldsymbol{\phi}$ のゼロでない真空期待値は，空間の各点にある“優先した”方向を選別し（事実上すべての点で同じ方向），その方向に“沿った”波の伝播（χ）とそれと“垂直な”方向の波の伝播（$\boldsymbol{\phi}'$）が異なるようになっているのである（Maiani 1976）。

6・8　隠れた大局的カイラル対称性

一見したところ，多少本筋から離れた話題のようであるが，この節の内容は以下に見るようにゲージ諸理論にもあてはまる。またこれは，南部－Goldstone モードで実現された大局的対称性の素粒子物理における実例である。

まず，簡単なモデルのラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\bar{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi+\mathrm{i}g\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\psi\cdot\boldsymbol{\phi}+g\bar{\psi}\psi\sigma+\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\phi})\\&+\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma)-\tfrac{1}{2}\mu^2(\sigma^2+\boldsymbol{\phi}^2)-\tfrac{1}{4}\lambda^2(\sigma^2+\boldsymbol{\phi}^2)^2\end{aligned} \tag{6.70}$$

から始めよう。ここでスピノル場 ψ は大局的 $SU(2)$ 群のもとで質量を持たない2重子で，擬スカラー場 $\boldsymbol{\phi}$ は $SU(2)$ のもとで3重子，スカラー場 σ は $SU(2)$ スカラーであるとする。いささか長い式ではあるが，今や式（6・70）は結構なじんだ形に見える。ψ–$\boldsymbol{\phi}$ の結合は（γ_5 で示される擬スカラーの性格を別にすれば），すでに§2・3で言及した。一方，$\boldsymbol{\phi}$ と σ の部分はすべて同じ質量 μ を持つ自由なラグランジアンの部分と，式（6・56）を思い起こさせる相互作用項と，簡単な ψ–σ 結合から成立っている。

ラグランジアン（6・70）の対称性は何であろうか。まず第一に，明らかに（無限小）$SU(2)$変換

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi &= -\mathrm{i}\epsilon\cdot\tau/2\,\psi \\ \delta\phi &= \boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\phi} \\ \delta\sigma &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.71}$$

のもとで不変である。これに付随するカレント

$$j^{a\mu}(x) = (\phi\times\partial^\mu\phi)^a + \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\tau^a\psi \tag{6.72}$$

は保存し，荷量

$$Q^a = \int j^{a0}(x)\,\mathrm{d}^3\mathrm{x} \tag{6.73}$$

は運動の恒量である。しかし，ラグランジアン（6・70）はさらに変換の組合わせ

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi &= -\mathrm{i}\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\,\gamma_5\psi \\ \delta\boldsymbol{\phi} &= \boldsymbol{\eta}\sigma \\ \delta\sigma &= -\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\phi} \end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

に対しても不変である。ここに，無限小パラメターは$\boldsymbol{\eta}$で表わしてある。したがって，第二の保存するカレント

$$j_5{}^{a\mu}(x) = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau^a\psi + (\sigma\partial^\mu\phi^a - \phi^a\partial^\mu\sigma) \tag{6.75}$$

とこれに対応する荷量がある。

式（6・74）について，はじめに２つの注意をしておく。第一に，これらの変換はパリテイの変化を含む（$\psi\to\gamma_5\psi$，擬スカラー$\boldsymbol{\phi}\to$スカラーσ）。その結果，カレント（6・75）は軸性（または擬）ベクトルであり，荷量$Q_5{}^a$は擬スカラーである。第二に，これら軸性カレントは，フェルミオンに質量項を加えると保存しなくなることを容易に証明することができる。

荷量Q^a，$Q_5{}^a$によって生成される代数を考えよう。興味深い結果

$$[Q^a, Q^b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}Q^c \tag{6.76}$$

$$[Q^a, Q_5{}^b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}Q_5{}^c \tag{6.77}$$

$$[Q_5{}^a, Q_5{}^b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc}Q^c \tag{6.78}$$

が得られる。式（6・76）は，Q^aが$SU(2)$の生成演算子であることを示す。式（6・77）は$Q_5{}^a$がこの$SU(2)$変換のもとでアイソ・ベクトルとして変換することを示す。式（6・78）は6個の荷量が代数として閉じることを示す。明らかに関係式（6・76）〜（6・78）は，熟知の関係式（6・76）だけよりは複雑

な系をつくる。この代数の行列表現を見いだすにはどう始めたらよいであろうか。幸いなことに，結合

$$Q_R{}^a = \frac{1}{2}(Q^a + Q_5{}^a) \tag{6.79}$$

$$Q_L{}^a = \frac{1}{2}(Q^a - Q_5{}^a) \tag{6.80}$$

を考えると非常に簡単になる。このとき，関係式は

$$[Q_R{}^a, Q_R{}^b] = i\epsilon_{abc} Q_R{}^c \tag{6.81}$$

$$[Q_L{}^a, Q_L{}^b] = i\epsilon_{abc} Q_L{}^c \tag{6.82}$$

$$[Q_R{}^a, Q_L{}^b] = 0 \tag{6.83}$$

である。式（6・83）は Q_R と Q_L が互いに交換することを示すが，式（6・81）と式（6・82）はそれぞれ別々の $SU(2)$ 群の生成演算子であることを示す。したがって，この結合した代数を $SU(2)_L \times SU(2)_R$ と呼ぶ。表現は“左まわりのアイソスピン”の大きさ $Q_L{}^2$ の固有値と“右まわりのアイソスピン”の大きさ $Q_R{}^2$ の固有値で指定される。“左”とか“右”とかいう言葉は，Q のフェルミオンからの寄与の中に因子（$1 \pm \gamma_5$）/2 があることに由来する。この因子は質量を持たない粒子のヘリシテイ射影演算子である。“左”荷量と“右”荷量を含むような対称性をカイラル対称性と呼ぶ。パリテイ操作によって $Q_L{}^a \leftrightarrow Q_R{}^a$ に変わることを注意しておく。

$SU(2)$ 代数が，3次元空間における回転の生成演算子の代数と同じであるように，$SU(2) \times SU(2)$ の代数は4次元（Euclid）空間の回転の生成演算子の代数と同じである。もちろんこの空間は，場の成分を含む“内部”空間である。実際，これはおそらく，もとの荷量 Q^a，$Q_5{}^a$，と変換（6・71），（6・74）を用いたほうがより明白であろう。明らかに式（6・71）は周知のごとく $t = 1/2$ の2重子 ψ と，$t = 1$ の3重子 ϕ に対するアイソ空間内での回転を表わす。式（6・74）の ϕ と σ の変換は Euclid 空間の“4元ベクトル”（σ, ϕ）に対する無限小“速度”η の“Lorentz 変換”の一種である。現実の Minkowski 空間の Lorentz 変換は $t^2 - \mathbf{x}^2$ を一定にするが，この Euclid 空間では $\sigma^2 + \phi^2$ が一定である。ラグランジアン（6・70）の中にあるのはまさにこの項であって，したがって変換（6・74）のもとでの不変性が導かれるのである。

さて，$\mu^2 < 0$ の場合は，ラグランジアン（6・70）の中の $\sigma - \phi$ ポテンシャル項はゼロでない値

$$\langle \sigma^2 + \phi^2 \rangle_0 = -\mu^2/\lambda^2 \tag{6.84}$$

に極小を持ち，図6・5の4次元的対応をなすことがわかる。式（6・84）は，

図6・5の極小点の円を，4次元の球面に拡張する。式（6・84）をみたす（σ, $\boldsymbol{\phi}$）の同等な組合わせは無数にある。しかし $U(1)$ の場合と同じく，たとえば

$$\langle\boldsymbol{\phi}\rangle_0 = 0, \langle\sigma\rangle_0 = (-\mu^2/\lambda^2)^{1/2} \equiv v \tag{6.85}$$

のような特定の基底状態を選ぶことができる。

式（6・84）の物理的解釈を調べるために，極小点（6・85）のまわりに場の量を展開し，

$$\sigma = v + \sigma' \tag{6.86}$$

とおく［式（6・47）参照］。式（6・85）のようなとり方をすれば，$\boldsymbol{\phi}$ はずらす必要はない。式（6・86）を式（6・70）に代入すると注目に値する結果が得られる。定数項を除いてラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial} + gv)\psi + \mathrm{i}g\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\psi\cdot\boldsymbol{\phi} + \mathrm{i}g\bar{\psi}\psi\sigma' \\ & + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\phi})\cdot(\partial^\mu\boldsymbol{\phi}) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma')(\partial^\mu\sigma') + \mu^2\sigma'^2 - \lambda^2 v\sigma'(\sigma'^2 + \boldsymbol{\phi}^2) \\ & - \tfrac{1}{4}\lambda^2(\sigma'^2 + \boldsymbol{\phi}^2)^2\end{aligned} \tag{6.87}$$

となる。これから次のことがわかる。

（i）フェルミオンは，真空値 v に比例した質量 $-gv$ を獲得する。

（ii）$\boldsymbol{\phi}$ 場は質量を持たない。対称性を破る条件（6・85）によって選別された方向に“垂直な” 3つの方向に対応して，3つの Goldstone ボソンが存在する。

（iii）条件（6・85）に対応して，σ' 場は質量（$-2\mu^2$）$^{1/2}$ を持つ。

（iv）v に比例する新たな $\sigma'-\boldsymbol{\phi}$ 3重結合が現われる。

これらの概念の重要な物理的応用は，式（3・66）の QCD ラグランジアンへの応用である。カラー場は，カラー1重子のハドロンの中にクォークを束縛すると仮定する。質量を持たないクォークに対してこのラグランジアンは，クォーク場の内部フレイバー空間（u, d, s, ……）に働く上述のタイプのカイラル対称性を持つ。この場合は，変換（6・71），（6・74）の最初の変換，あるいはほかのフレイバーへのその拡張が含まれる。問題を限定して，議論を $SU(2)$ フレイバーに制限しよう。すると，カイラル対称性は $SU(2)_\mathrm{L}\times SU(2)_\mathrm{R}$ である。関連するベクトルおよび軸性ベクトルのカレントは保存し，前のモデルのカレント（6・72），（6・75）が満たすのと同じ種類の交換関係に従う。一方，対応する荷量は交換関係（6・76）～（6・78）に従う。（これらのカレントは，第7章で議論する弱い相互作用のゲージ理論に入ってくるカレントとまったく同じではないが，関連している。）

$SU(2)$ ベクトル・カレントは，アイソスピンのカレントと解釈される。このカレントの保存に関連した対称性は，ハドロンのアイソスピン多重子として顕在的に現われる。軸性カレントの保存に対応する対称性は何であろうか。たとえ，式（3・66）の中のクォーク質量がゼロであっても，これは顕在的なハドロンの対称性としては現われない。そうなれば，バリオンの質量はゼロだからである。そうではなくて，この軸性 $SU(2)$ 対称性は，南部–Goldstone モードで実現されていると解釈する。この場合，束縛状態のフェルミオンは，質量を持ちうる。しかし，質量を持たない擬スカラー粒子の存在を容認しなくてはならない。この粒子は擬スカラーの荷量を真空に結合する。そこで，これらの粒子をパイオン（$SU(2)$ の場合）と同定しようというのである。ラグランジアン（6・87）自身は実効ハミルトニアンと解釈され，もともとの $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性が自発的に破れて，アイソスピン群 $SU(2)$ になっていることを示す。

明らかに，パイオンの質量はゼロでない。しかし，おそらく，小さいとみなしても差支えないであろう。もうひとつ，この考えのすぐわかる難点は，軸性カレントは正確に保存することはできない，ということである。そうであれば，ずっと以前，Taylor（1958）が示したように，パイオンは崩壊しなくなってしまう。実はこれらの難点は互いに関連しているように思われる。パイオンが質量を持たず，軸性カレントが正確に保存する世界，すなわち，正確なカイラル対称性が隠れて実現されている場合を想像することができる。それからゼロでないパイオン質量 m_π を導入し，軸性ベクトルカレントの発散が $m_\pi{}^2$ に比例するようにする。カイラル対称性の極限は $m_\pi{}^2 \to 0$ で与えられる。これを“部分的に保存される軸性カレントの理論”（P CAC）と呼ぶ。

これらの考えは，ラグランジアン（6・70）の形のモデルでは

$$c\sigma(x) \tag{6.88}$$

の項をもとのラグランジアンに加えて作ることができる。ここで c はある定数である。[これはまさに Gell–Mann & Levy（1960）の σ モデルである。] あからさまに対称性が破れている条件下では，$\partial_\mu j^{a\mu}(x)$ はもはやゼロではなく，ただちに式（6・74）より

$$\partial_\mu j^{a\mu}(x) = -c\phi^a(x) \tag{6.89}$$

で与えられる。項（6・88）を加えると，ポテンシャルの極小は一意である。これは場 σ のゼロでない値（これを再び v とする）と ϕ のゼロの値である。この極小点は

$$c=v(\mu^2+\lambda^2v^2) \tag{6.90}$$

のような点である。平行移動（6・86）を行うと，今度は式（6・87）に類似した結果を得るが，

$$-\tfrac{1}{2}(\mu^2+\lambda^2v^2)\phi^2 \tag{6.91}$$

の項が余分に加わる。[σ' の質量もまた変わる。式（6・90）を極小条件として課し，この古典的な結果に対して高次の補正を無視する。] 式（6・89）と式（6・90）を結合するとカレントは

$$\partial_\mu j^{a\mu}(x)=-vm_\pi{}^2\phi^a(x) \tag{6.92}$$

となり，実際 $m_\pi{}^2\to 0$（$c\to 0$ が対称性の極限）ならゼロになる。式（6・92）と $\pi\to e\nu$ 崩壊の行列要素を比較すると $v=-f_\pi$（パイオンの崩壊定数）となる。PCAC 仮説はそこで

$$\partial_\mu j^{a\mu}(x)=f_\pi m_\pi{}^2\phi^a(x) \tag{6.93}$$

となり，特別なモデルによらなくなる。

クォークの言葉で言えば，式（3・66）のようにクォークの質量を導入すれば，カイラル対称性をあからさまに破る。しかし，クォークカレントおよび荷量の間の交換関係は，Gell-Mann（1961）のカレント（および荷量）代数のように，そのまま残る。アイソスピンの対称性は，$m_u\approx m_d$ である範囲でよく成立つ。以上の物理像では，パイオンの質量自体はクォークの質量による。クォークの質量の起源は未解決の問題である。（後の§7・4および§7・5を見よ。）

この理論の結果について，本筋を離れすぎて深入りしたようである（たとえば，Adler & Dashen 1968を見よ）。しかし，隠れたカイラル対称性が近似的に正しいというよい験証が存在することを注意しておく。この験証のうちには，Goldberger-Treiman の関係式（1958），πN 散乱の低エネルギー諸定理（南部-Lurié 1962，Adler　1965a，1965b），Adler-Weisberger の関係式（Adler 1965c，Weisberger 1965）および Callan-Treiman の関係式（1966）が含まれる。これらの諸結果は，実験的には約 10 %の精度で確かめられている。この考えはストレンジネスの変わる軸性ベクトルカレントに拡張することができ，およそ 30 %の精度で成立することが知られている。

（隠れた）カイラル対称性の考え方の経験的な成功，および $\pi^0\to\gamma\gamma$ 崩壊の予言の成功（§8・3）は，QCD のラグランジアン（3・66）の正しさを帰納することに用いることができる（Lewellyn Smith 1980）。基本的な場が何であれ，その間の強い力はこの対称性をみたすものでなくてはならない。

さて議論の本筋にもどり，ゲージ量子に質量を与える問題をとりあげよう。

6・9　隠れた局所的 $U(1)$ 対称性。Goldstone モデルの電磁相互作用（あるいは Higgs モデル）

§6・4および§6・5で，非相対論的理論に電磁力を含めるとき，どのようにして質量がゼロの Goldstone 励起子が重くなる習性をもつか，ということを論じた。さて Higgs のモデル（Higgs 1964 a，1964 b）を用いて，この現象を相対論的な場合に調べよう。このモデルはまさに，Goldstone のモデルと同じであるが，電磁相互作用が加わっている。電磁相互作用はゲージ原理（§3・2）を通じて導入される。相互作用は

大局的 $U(1)$ 不変性　　$\phi(x)\to e^{-i\alpha}\phi(x)$　　(6.94)

を

局所的 $U(1)$ 不変性　　$\phi(x)\to e^{-ie\chi(x)}\phi(x)$　　(6.95)

で置き換えることによって決定される。電荷 e はのちの便宜のためにつけた。§3・2で論じたように，変換（6・95）をラグランジアン（6・39）に施したとき生ずる $\partial_\mu\chi(x)$ 項を相殺するために，ひとつのベクトル場 $A_\mu(x)$ を必要とする。ϕ が変換（6・95）で変わるとき，A_μ は

$$A_\mu\to A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\chi \tag{6.96}$$

のように変わる。実際，ラグランジアン（6・39）は単に

$$\mathcal{L}=(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)-V(\phi)-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6.97}$$

で置き換わる。ここに D_μ は $U(1)$ の共変微係数で

$$D_\mu=\partial_\mu+ieA_\mu \tag{6.98}$$

で定義され，いつものように，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$　である。

このモデルには4つの自由度（A_μ から2つ，ϕ_1 と ϕ_2 から2つ）があることがただちにわかる。以前のおもちゃ $A_\mu-\phi$ モデル（§5・3および§5・4，ϕ は実数場）と同様，ϕ のうちひとつが質量を持つベクトル粒子を作るため "A^μ と組になり" ほかの ϕ は質量を持つようになることが期待される。

式（6・40）と同じ V をとれば，$\mu^2>0$　の場合，添字Bをこれから落とすことにして真空は

$$\langle 0|\phi|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}f \tag{6.99}$$

で与えられると主張する。これは式（6・44）で，$\omega=0$　と選んだことになる。ゼロでない真空期待値を持つこのような場を，隠れた局所的対称性との脈絡で現在ではほとんど普遍的に“Higgs 場”と呼ぶ。この $U(1)$ モデルは，初めて Higgs（1964a，1964b）によって論じられた。同様な考察は Englert & Brout（1964）（非可換の場合，次の節を見よ）および Guralnik *et al*（1964）によっても進められた。

前と同じく，$\phi_1=f+\chi_1$，$\phi_2=\chi_2$　とおいて $\mathscr{L}$ を計算することができる。最終的にはこれを行うが，はじめに状況を知るための簡単な方法があることに注意しよう。$\phi(x)$に局所的ゲージ変換を行うと $\phi(x)$には x に依存する位相因子がかかる。ϕ を2つの場 ϕ_1，ϕ_2 に分解するかわりに，$\phi=(1/\sqrt{2})(\phi_1-i\phi_2)$ と分解すれば，ϕ の“位相”と ϕ の“絶対値”を

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(f+\rho(x))e^{-i\theta(x)/f} \tag{6.100}$$

として分離できる。ここで，ゲージ変換（6・95）の $\chi(x)$を適当に選び，$\theta(x)$をまったく除外してしまうことができるであろう。まさにそうである。変換（6・95）のもとで

$$\phi'(x)=e^{-ie\chi(x)}\phi(x) \tag{6.101}$$

あるいは

$$(f+\rho'(x))e^{-i\theta'(x)/f}=e^{-ie\chi(x)}(f+\rho(x))e^{-i\theta(x)/f} \tag{6.102}$$

であるから，

$$\rho'(x)=\rho(x),\theta'(x)=\theta(x)+ef\chi(x) \tag{6.103}$$

を得る。そこで特別なゲージ関数

$$\chi(x)=-\frac{1}{ef}\theta(x) \tag{6.104}$$

を選べば，$\theta'=0$　を得る。§6・3，§6・6の議論を思いおこせば，Goldstone モードはまさに，異なる真空を区別するパラメターの時空間内の振動に関連した量子である。この場合，真空のパラメターは，$\alpha(x)=e\chi(x)$ である。したがって，Goldstone モードは位相角の場 $\theta(x)$ の量子である。しかし，（6・104）のゲージでは $\theta'=0$　ととったのだから，質量を持たない励起は物理的粒子のスペクトルの中には見えない。大局的 $U(1)$ 対称性の場合 α は一定であって，Goldstone 場は時空間のすべての点において打消すということはできなかった。

このゲージでは，A_μ は，

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{ef}\,\partial_\mu \theta(x) \tag{6.105}$$

となり［式（5・24）参照！］，もちろん

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(f + \rho(x)) \tag{6.106}$$

である。このときラグランジアン（6・97）は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left(\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - \tfrac{1}{2}\mu^2\rho^2\right) + \left(-\tfrac{1}{4}F_{A'\mu\nu}F_{A'}{}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}e^2 f^2 A'_\mu A'^\mu\right) \\ &+ A'_\mu A'^\mu \tfrac{1}{2}e^2(\rho^2 + 2f\rho) - \tfrac{1}{8}\lambda^2\rho^4 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 f\rho^3 + \text{定数}\end{aligned} \tag{6.107}$$

となり，$\theta(x)$ は消失する。局所的な位相の変動は，観測可能な質量を持たないスカラー粒子を生じない。その代わり，位相の変動はゲージ変換によって電磁場の中に吸収されてしまっており，電磁場は縦成分（$\partial_\mu\theta$）を獲得して質量を持つ粒子になっている［式（6・107）の中の $\frac{1}{2}e^2f^2A'_\mu A'^\mu$ の項を見よ］。出発点になった4つの自由度のうち，3つは質量を持つスピン1の場 A'_μ となり，1つは質量を持つスカラー場 ρ になっている。ρ のような場の量子を “Higgs ボソン” という。

$\mathscr{L}$ のこの形は，極めてあざやかに粒子のスペクトルを示している。しかし，これはくりこみを論ずるのには不便である。A' の伝播関数の高エネルギー領域での挙動がすべて禍をなすからである。しかし，§5・3のおもちゃのモデルで得た経験によれば，この問題を処理する方法はまさに理論のゲージ不変性を利用することである。異なるゲージでは，高エネルギー領域の振舞いはずっと良好であろうと予想される（粒子としての解釈はいささか不明瞭になるかもしれないが）。そこで

$$\phi_1 = f + \chi_1, \phi_2 = \chi_2 \tag{6.108}$$

とおき，任意のゲージを考察しよう。結果は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left(\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\chi_1)(\partial^\mu\chi_1) - \tfrac{1}{2}\mu^2{\chi_1}^2\right) \\ &+ \left(\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\chi_2)(\partial^\mu\chi_2) - efA^\mu\partial_\mu\chi_2 - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}e^2f^2A_\mu A^\mu\right) \\ &+ eA^\mu(\chi_2\partial_\mu\chi_1 - \chi_1\partial_\mu\chi_2) + \tfrac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu({\chi_1}^2 + {\chi_2}^2 + 2f\chi_1) \\ &- \frac{|\mu|\lambda}{2}\,\chi_1({\chi_1}^2 + {\chi_2}^2) - \tfrac{1}{8}\lambda^2({\chi_1}^2 + {\chi_2}^2)^2\end{aligned} \tag{6.109}$$

となる。式（6・109）の括孤の中の第2項はまさにおもちゃのラグランジアン（5・26）で質量 $M=ef$ とおいたものである。しかし今や，これは自明でない相互作用をする場の理論の中に組込まれてしまっている。$A^{\mu}\partial_{\mu}\chi_2$ 結合のために，ただちに A の伝播関数を読みとるということはできない。実際，無限小ゲージ変換

$$A_{\mu}\to A_{\mu}+\partial_{\mu}\epsilon(x) \tag{6.110}$$

により

$$\chi_1(x)\to\chi_1(x)-e\epsilon(x)\chi_2(x) \tag{6.111}$$

$$\chi_2(x)\to\chi_2(x)+e\epsilon(x)f+e\epsilon(x)\chi_1(x) \tag{6.112}$$

を得る。したがって，式（6・12）は式（5・25）と同じように非斉次項を生ずる。A_{μ}，χ_2 ともに非斉次の平行移動を受ける。量子化するためにはゲージを決める必要がある。以前と同じく 't Hooft 項

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial_{\mu}A^{\mu}+\xi M\chi_2)^2 \qquad M=ef \tag{6.113}$$

を加えると，ξ に依存する伝播関数

$$\left[-g_{\mu\nu}+\frac{(1-\xi)k_{\mu}k_{\nu}}{k^2-\xi M^2}\right]/(k^2-M^2)\ \text{（A場に対し）} \tag{6.114}$$

および

$$(k^2-\xi M^2)^{-1}\ \text{（}\chi_2\text{ 場に対し）} \tag{6.115}$$

を得る。χ_1 場は質量 μ の普通のスカラー場である。式（6・114）および式（6・115）の ξ に依存する極は常に消去しあわなくてはならない。

式（6・114）を見ると，予期したように A の伝播関数の高エネルギー領域での挙動は（$\xi\neq\infty$ である限り）改良されている。したがって，この理論は有限の ξ の任意のゲージに対してくりこみ可能である，と推測することができる。この証明は，'t Hooft（1971b）によって与えられた。$\xi=\infty$ のゲージは，ラグランジアン（6・107）に対応し，χ_2 場は消え，A 粒子は質量 M を持ち，式（5・6）のような伝播関数を持つ普通のスピン1の粒子である。粒子のスペクトルが容易に解釈できるようなゲージをしばしばユニタリー・ゲージあるいは U ゲージという。ユニタリー・ゲージでは，ξ に依存する極はない。しかし，理論はあからさまにくりこみ可能な形ではない。ξ が有限であるゲージをくりこみ可能なゲージ，あるいはRゲージという。ユニタリティを表わすかくりこみ可能性を表わすかは，ゲージ不変性に頼っている。すなわち，ひとつのゲー

ジにはひとつの望ましい性質が表われ，別のゲージでは別の望ましい性質が表われる。しかし，ゲージ不変性により，両者は同じ理論なのである。言うまでもないことであるが，これは証明ではない。

式（6・109）の最終的な$\mathscr{L}$（χ_1，χ_2)には，極めて小数個の独立なパラメターを除いて，対称性の痕跡も留めていない。μ，e，f わずか3つのパラメターがA場，χ_1場，および4つの相互作用$A^2\chi^2$，$A_\mu\partial_\mu\chi$，χ^3，χ^4を記述するために用いられているにすぎない。実はこの“結合定数の間の共同謀議”が，まさにBorn 図形の望ましからぬ高エネルギー領域の挙動を消去し，（おそらく）くりこみ可能性を保証するために，要求されるのである。

§6・6の最後に，自発的に破れている大局的対称性のカレントが，どのように真空を Goldstone ボソンと結びつけているかを見た。Higgs 場の場合はどうであろうか。ラグランジアン（6・97）の大局的対称性（6・94）に対応する電磁カレントは，ゲージ場を含んで

$$j^\mu = \mathrm{i}e(\phi^\dagger\partial^\mu\phi-(\partial^\mu\phi)^\dagger\phi)-2e^2A^\mu\phi^\dagger\phi \tag{6.116}$$

である。[§3・1ですでに論じた。式（3・17）を見よ。] 書換え（6・108）を行い，線型項のみを保存すれば

$$j^\mu = -e^2f^2+ef\partial^\mu\chi_2+\text{非線型項} \tag{6.117}$$

である。χ_2を消去するために$\partial_\mu j^\mu=0$ を用いて

$$j^\mu = -M^2\left(g^{\mu\nu}-\frac{\partial^\mu\partial^\nu}{\Box}\right)A_\nu+\ e\text{の桁の項} \tag{6.118}$$

を得る（Taylor 1978）。したがって，質量M，偏りϵの質量殻上のベクトル粒子に対して

$$\langle 0|j^\mu|\epsilon,k\rangle = -M^2\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right)\epsilon_\nu+e\text{の桁の項} \tag{6.119}$$

が成立つ。この場合のカレントは真空を質量を持つベクトル粒子に結びつける。

質量Mの起源について，カレント（6・116）を考察することによって興味ある物理的解釈が得られる。ϕのゼロでない真空期待値という仮説の決定的な結果は，真空中においてさえも，ゼロでないカレントj^μが存在することである。さらに，この真空カレントは，電磁ポテンシャルA^μに比例する。$\langle 0|\phi|0\rangle$を実としてゲージ（6・99）を選べば，

$$\langle 0|j^\mu|0\rangle = -e^2f^2A'^\mu = -M^2A'^\mu \tag{6.120}$$

を得る。ここに，式（6・105）の記法と合わせて，ゲージ条件$\partial\cdot A'=0$ を

みたすポテンシャルを A'^{μ} と書いた。したがって，真空中における A'^{μ} 場の Maxwell 方程式は

$$\Box A'^{\mu}=-M^{2}A'^{\mu} \tag{6.121}$$

であり，A'^{μ} の各成分は質量 M を持つ。

（静的な場に対する）非相対論的物理では，関係式

$$\mathbf{j}=-M^{2}\mathbf{A} \tag{6.122}$$

は超伝導の理論で現われ，London の方程式（Tilley & Tilley 1974）として知られている。この場合カレント（6・122）は電子対（Cooper 対）に対応する“遮蔽カレント”と解釈される。電子対の凝縮系は超伝導の基底状態をつくる。静的な場では式（6・122）は

$$\nabla^{2}\mathbf{A}=M^{2}\mathbf{A} \tag{6.123}$$

になる。したがって，1次元の配位では，場は侵入距離と呼ばれる M^{-1} の程度の距離になると急激に減少する。外磁場は超伝導体の内部に M^{-1} の程度の距離しか侵入できない。この現象を Meissner 効果と呼ぶ。超伝導の場合に確立されているこれらの考えを転用して，同様な“遮蔽カレント”が素粒子物理の真空にも存在するとしたことは，めざましい着想である。しかもこれは，質量を持つベクトル粒子のくりこみ可能な理論をつくる唯一の方法であるように思われる（次節参照）。確かに，“何も”複雑になってはいないのである。

Aitchison & Hey（1982）は，非相対論的な類推をさらにおし進めた。ここでひとつ注意をしておく。Higgs 場の役割は Cooper 対の波動関数が演じている。この波動関数は凝縮系を記述するから古典場として働く（超流動の基底状態の Bogoliubov の取扱い方を参照）。言い換えれば，これはある種の“束縛状態”の波動関数である。これから，今まではまったく現象論的な方法で導入してきた Higgs 場 ϕ にも，同じことがあてはまるかもしれないという可能性が生ずる。物質にこの見解を適用すれば，あからさまに Higgs 場を含まないラグランジアンから出発し，一種の“対生成”が起こり，隠れた対称性の相に至ることを証明する望みが抱けるかもしれない。現在まで，まだこの種の現実的計算は存在しない。

これとはかなり異なった考え方のひとつは，たとえば簡単な $U(1)$ モデルにおける対称性の破れ，すなわち，式（6・40）の中の μ^{2} が負から正へ変わることは，古典的なレベルでは存在せず，量子論的な輻射補正によって生ずるとす

ることである。Coleman & Weinberg（1973）が最初にこのタイプのモデル［ラグランジアン（6・97），$\mu^2=0$］を論じた。この場合は，スカラー（Higgs）粒子もゲージ粒子もともに質量を獲得するが，その比は一定となり，電荷のパラメター e で表わされる。明らかに，このモデルはラグランジアン（6・97）より1つ少ないパラメターを持っており，したがって，予言能力はより大である。

もちろん，言うまでもないことだが，この節の内容は純粋にモデルの製作であって，素粒子物理への直接の対応はない。おそらく，現実の光子は質量を持たないからである。さて，この長い章の最後の段階として，物理的な対応を持つ隠れたゲージ対称性を解説しよう。

6・10 隠れた局所的非可換対称性

一般的な取扱いを試みるかわりに，今論じたばかりの特定の $U(1)$ Goldstone モデルの非可換的類推に議論を限ることにしよう。すなわち，ラグランジアン（6・56）の大局的 $SU(2)\times U(1)$ 群を局所的にするようにゲージ場を導入するのである。$\mathscr{L}$ を局所的に不変にするため，共変微分を用いる。

$$\mathcal{L}=(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi)+\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi-\tfrac{1}{2}\lambda^2(\phi^\dagger\phi)^2-\tfrac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}-\tfrac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{6.124}$$

ここでアイソ3重子のゲージ場 $W_\mu{}^a$ $(a=1, 2, 3)$ は式（3・45）の $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ を通じて局所的 $SU(2)$ 群と関連している。また $G_{\mu\nu}$ は

$$G_{\mu\nu}=\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu \tag{6.125}$$

で，$U(1)$ 群のゲージ場 $B_\mu(x)$ を含む。式（6・124）で D_μ は

$$D_\mu\phi=\left(\partial_\mu+\frac{ig}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}_\mu+\frac{ig'}{2}B_\mu\right)\phi \tag{6.126}$$

で定義される。これは，式（3・34）の素直な一般化である。g' 項の因子 1/2 はのちの便宜のため付したにすぎない。

前と同じく，この $\mathscr{L}$ に対する基底状態を求めよう。$\langle 0|\mathbf{W}_\mu|0\rangle\neq 0$, $\langle 0|B_\mu|0\rangle\neq 0$ を認めることはできない。そうすれば Lorentz 不変性が破れてしまうからである。したがって，ただひとつ，$\langle 0|\phi|0\rangle\neq 0$ だけを調べればよい。以前のように

$$\langle 0|\phi|0\rangle=\begin{pmatrix}0\\ f/\sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{6.127}$$

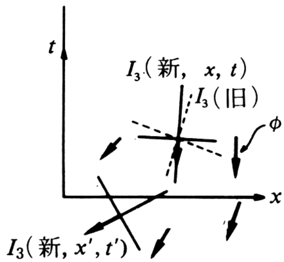


図6・7　矢印は内部空間におけるϕの方向と大きさを表わす。点線は図6・6に示された〝もとの″内部空間軸を表わす。〝新しい″内部空間軸はそれぞれの時空点で独立に選ぶことができる。

とおく。しかし，今度はアイソスピンの軸の方向を空間の各点で独立に選ぶことができる。時空間の各点でそれぞれ異なる$SU(2)$回転を行い，任意の$\boldsymbol{\phi}$を"下向き"の方向に整列させるのである。ちょうど図6・7に示すように，局所的な$SU(2)$回転を行って，任意のアイソスピノルが空間の各点でそれぞれ異なる適当な軸に関して"下向き"スピノルに見えるようにすることができる（図6・6も参照せよ）。したがって，任意の$\boldsymbol{\phi}$は"下向き"のアイソスピノルから純粋な位相だけずれているとみなすことができる。このようにして

$$\phi(x) = \exp\left(-i\boldsymbol{\theta}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2f\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ f/\sqrt{2}+\sigma(x)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{6.128}$$

とおけば［指数の肩の$1/f$については式（6・100）参照］，$\boldsymbol{\theta}$場をゲージ化してしまうことができると考えられる。実際，局所的$SU(2)$変換のもとで

$$\phi \to \phi' = \exp\left(-ig\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2\right)\phi$$

となり，

$$\boldsymbol{\theta}(x) \to \boldsymbol{\theta}(x) + fg\boldsymbol{\alpha}(x) \tag{6.129}$$

だから，$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\theta}/fg$　と選べば，$\boldsymbol{\theta}'(x) = 0$　を得る。場はまさしく（ダッシュを落して）

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (f+\sigma(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{6.130}$$

である。式（6・130）を$\mathscr{L}$に代入し，いつものように2次の項までを書下せば

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \tfrac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \tfrac{1}{2}\mu^2\sigma^2 + \tfrac{1}{8}g^2f^2(W_\mu{}^1W^{1\mu} + W_\mu{}^2W^{2\mu}) \\ & + \tfrac{1}{8}f^2(gW_\mu{}^3 - g'B_\mu)(gW^{3\mu} - g'B^\mu) \\ & + \text{高次の項} + \mathbf{W},\ B\ \text{場の運動エネルギーの項}\end{aligned} \tag{6.131}$$

を得る。$W_\mu{}^1$，$W_\mu{}^2$はそのまま現われるが，$W_\mu{}^3$の場とB_μの場は混合してい

ることがわかる。しかし線型結合*

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu{}^3 - \sin\theta_W B_\mu \qquad (6.132)$$
$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu{}^3 + \cos\theta_W B_\mu$$

を導入し

$$\tan\theta_W = g'/g \qquad (6.133)$$

ととれば，容易に分離できる。これから$\mathscr{L}$の“相互作用をしていない”部分は最終的に

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} = & \tfrac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \tfrac{1}{2}\mu^2\sigma^2 \\ & - \tfrac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu{}^1 - \partial_\nu W_\mu{}^1)(\partial^\mu W^{1\nu} - \partial^\nu W^{1\mu}) + \tfrac{1}{8}g^2 f^2 (W_\mu{}^1 W^{1\mu}) \\ & - \tfrac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu{}^2 - \partial_\nu W_\mu{}^2)(\partial^\mu W^{2\nu} - \partial^\nu W^{2\mu}) + \tfrac{1}{8}g^2 f^2 (W_\mu{}^2 W^{2\mu}) \\ & - \tfrac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \tfrac{1}{8}f^2 Z_\mu Z^\mu (g^2 + g'^2) \\ & - \tfrac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned} \qquad (6.134)$$

となる。この形では物理的解釈は明瞭である。質量がそれぞれ

$$M_1 = M_2 = \tfrac{1}{2}fg \equiv M_W \qquad (6.135)$$
$$M_3 = \tfrac{1}{2}f(g^2 + g'^2)^{1/2} = M_1/\cos\theta_W \equiv M_Z \qquad (6.136)$$

で与えられる3つの質量を持つベクトル粒子と質量を持たない1つのベクトル粒子，および1つのスカラー粒子（質量μを持つ“Higgsメソン”σ）が存在する。自由度の数を数えてみよう。はじめにラグランジアン（6・124）の中には質量を持たない3つのW粒子ベクトルと，同じく質量を持たない1つのB粒子ベクトルがあった。これで自由度の数は8である。ほかに4つのスカラー場があったから，自由度の数は合計12である。ラグランジアン（6・134）の形では対称性は隠れ，3つの質量を持つベクトル粒子（自由度の数は9）と1つの質量を持たないベクトル粒子（自由度の数はこれで11になる）および1つの質量を持つスカラー粒子が存在して，自由度の総計は再び12である。A_μが質量を持たないこと（電磁ベクトル・ポテンシャルとして最終的に解釈できるために必要である）は，対称性を破る条件$\langle 0|\phi|0\rangle \neq 0$の選択に由来することを強調しておく。この条件は生成演算子の結合$(1+\tau_3)/2$によって保存され，したがって，1つのベクトル粒子を質量を持たないままに残す。[§6・7の考察との類推による。なお，Taylor（1978）および§6・5を参照]。

* この記法は次章［式（7・15），（7・16）参照］のGSW理論への応用をあらかじめ見越している。θ_Wは弱い混合角と呼ばれる。

A_μ のこの解釈は，$D_\mu\phi$ を A_μ と Z で書いてみるとまことにもっともらしく見える（ほかの項はしばらく無視する）。

$$D_\mu\phi = \partial_\mu + \mathrm{i}g\sin\theta_\mathrm{W}\frac{(1+\tau_3)}{2}A_\mu + \frac{\mathrm{i}g}{\cos\theta_\mathrm{W}} \times\left(\frac{\tau_3}{2} - \sin^2\theta_\mathrm{W}\frac{(1+\tau_3)}{2}\right)Z_\mu + \ldots \tag{6.137}$$

この式では A_μ は正確に普通の電荷の演算子 $(1+\tau_3)/2$ と結合しており，この演算子は対称性を保存する生成演算子である。またこの解釈が物理的に正しければ，$g\sin\theta_\mathrm{W}$ は物理的電気素量 e と同じであることにも注目しよう。このことから，最終的に，以上の考察は，電・弱相互作用に適用できるはずである。これについては次の章で論ずる。

最後に，§ 6・9 の議論のあとでは，式（6・134）の形は特別なゲージの選択［$\alpha=-\theta/fg$ 式（6・129）参照］に対応することがすぐ了解される。§ 6・9 の言葉で表わせば，ユニタリー・ゲージである。可換変換群の場合と同じく，いつもほかのゲージを選ぶ可能性がある。一般的に言えば，くりこみの問題を扱うにはほかのゲージのほうが有利である。その場合は，一般的なパラメター

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ f/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_2' + \mathrm{i}\phi_1' \\ \sigma - \mathrm{i}\phi_3' \end{pmatrix} \tag{6.138}$$

にもどり，'t Hooft のゲージを決定する項

$$\frac{-1}{2\xi}\left\{\sum_{\alpha=1,2}(\partial_\mu W^{\alpha\mu} + \xi M_W \phi'^{\alpha})^2 + (\partial_\mu Z^\mu + \xi M_Z \phi_3') + (\partial_\mu A^\mu)^2\right\} \tag{6.139}$$

を加えて，式（6・114），（6・115）のように ξ に依存する伝播関数を導く。このようなゲージでは，Feynman の規則は，もちろん物理的な Higgs 場 σ ばかりでなく非物理的な場 ϕ' の量子の交換に対応する図形も含んでいる。

非可換の場合の一般論は，Kibble（1967）によって取扱われた。

7

弱い相互作用と電磁相互作用の理論

7·1 は じ め に

1960年にGlashowは，電磁相互作用と弱い相互作用の統一化をもくろんで*，“部分的に対称な”電・弱相互作用の統一理論を提唱した。“部分的に対称”ということは，ラグランジアンの中のあからさまな質量項だけが対称性を破るという意味であった（§6·8で論じたPCACのように）。当時知られていた電荷を帯びた弱いカレントと，もちろん電磁カレントとを考えると，統一理論の自然な候補は，§5·2の例のように，3つのベクトル・ボソンすなわち$W^{\pm}$とγを含む理論であった。しかし，M_Wがゼロでありえないことは明白に認識されていた。Glashow（1961）の言葉を引用すれば，“この事実は仮設的なベクトル・メソンと光子との類推を追求してゆく途上で，最大のつまづきの石である。”しかしながら，“これこそ乗り越えなくてはならないつまづきの石である。”信念とは言わないまでも，このような直観には感嘆せざるをえない。

さらにGlashowは，対称性がラグランジアンの中のあからさまなM_W項だけで破れているような最も簡単な（部分的に対称な）理論は，当時知られていた荷電カレントのほかに中性の弱いカレントを含まねばならない，と論じた。これはすべてで4つのボソン，$W^{\pm}$，γおよび中性のZ^0を導入することを意味する。この構想では，対称群はまさに§6·7，6·10の$SU(2)\times U(1)$であった。しかしながら，弱い相互作用の対称性はハドロンと同じくレプトンにも適用される。したがって，レプトンも“弱い”アイソスピンと“弱い”ハイパー荷の表現によって分類されなくてはならなかった。M_W, M_Zがあまり大きいので，このような対称性の痕跡は現実のレプトンのスペクトルには残らず，観測されないであろうと考えられた。

この理論は，未解決の諸問題をあとに残した。質量項をどう取扱うか，特に

* Schwinger（1957），およびBludman（1958）は早い時期にこの問題を追求していた。

くりこみ可能性はどうなるか。ゲージ対称性を隠れたものにすることによって，これらの難点を解決できることを示唆したのが，Weinberg（1967）および独立に Salam（1968）であった。彼らは，Glashow のモデルのベクトル・ボソンは，§6・10に詳述したようなメカニズムによって質量を獲得すると主張した。この見解では，$SU(2)\times U(1)$ 対称性が局所的であり，ベクトル粒子がゲージ場の量子であることが本質的に重要である。したがって，理論をくりこみ可能にするため，対称性の破れた相でも，ゲージ不変性が十分“記憶”されていると希望してもよいであろう。このような事情のもとでは，すでにくり返し強調したように，対称性は近似的な質量多重子の存在としてよりも，むしろ理論のパラメター（質量と結合定数）の間の特定の関係として，その存在を露わにするのである。これらの関係は，くりこみ可能性と矛盾しない高エネルギー領域の振舞いを生ずるように，理論の Born 図形どうしをじょうずに相殺するであろう，と考えられるのである（§5・2参照）。

くりこみ可能性は，'t Hooft (1971 b) によって実際に証明された。

7・2　GSW モデル（レプトンのみ）

さて，GSW 理論の展開にならって，まずしばらくの間，レプトンだけに適用することから始める。§6・10のラグランジアンは，ゲージ場と（Higgs の）スカラー場しか含まない。これはもちろん，これから論じようとするより完全な物理的状況に対して，レプトンの部分（セクターと呼ぶ）だけにあてはまる適切なラグランジアンを慎重に定めたものであった。特に，A^μ を現実の電磁場と同定し，かつ $W^\pm$ と Z はそれぞれ荷電および中性の弱いカレントに対応する量子であるということをのちに示そう。それでは，どのようにしてレプトンを含めたらよいのであろうか。

$(t,\ t_3)$によって弱いアイソスピンの $SU(2)$ 群の量子数，y によって$U(1)$ 群に関連する弱い“ハイパー荷”を表わすことにする。明らかに W 場は $t=1$で，$t_3=\pm1$に対応する場は

$$W=\frac{1}{\sqrt{2}}(W^1-\mathrm{i}W^2),\quad W^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(W^1+\mathrm{i}W^2)\tag{7.1}$$

である。W は W^+ 粒子を消滅させるか W^- 粒子を生成させる演算子である［すでに $t(\phi)=\frac{1}{2}$ ととった。$y(\phi)$については後述］。レプトン対を含む基本的な過程は，たとえば

$$W^- \to e^- + \bar{\nu}_e \tag{7.2}$$

である。$t(W)=1$ であれば，最も簡単な可能性は e^-, ν_e が弱いアイソ２重子

$$\ell_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

をなす，とおくことである。このとき大局的に $SU(2)$ 不変な相互作用は $\bar{\ell}_e(\tau/2)\ell_e \cdot \mathbf{W}$ である（Lorentz 構造については後に述べる）。もし

$$\mathbf{j} = \bar{\ell}_e \tau/2 \ell_e \tag{7.4}$$

であれば

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{W} = (\bar{\nu}_e e^- W + \bar{e}\nu_e W^\dagger) + j_3 W^3 \tag{7.5}$$

である。この式の中で，たとえば $\bar{e}\nu_e W^\dagger$ 項は W^- を消滅させ，e^- と $\overline{\nu_e}$ を生成する。同じことをミューオンにも行い，

$$\ell_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

とおくが，必要とあればそのほかのレプトンの“世代”にも拡張する。

次に，Lorentz 構造を考える。たとえば Marshak *et al*.（1969）などの所論により，レプトンの弱いカレントは純 V–A 型である。したがって，実際は

$$\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e W^{\dagger\mu} \tag{7.7}$$

の形のカレントを扱うことになる。ここで，アイソ空間の指標は省略した。内部的 $SU(2)$ 群のもとで e^- と ν_e の任意のユニタリー変換を考えようというのであるが，一方，実験によりニュートリノの場は左まわり（L）のヘリシティしか持っていないから，式（7・3）の中の電子の場は２つのヘリシティを持つことはできない。そこで，基本的なアイソ２重子は，式（7・3）ではなくて

$$\ell_e = \begin{pmatrix} \dfrac{(1-\gamma_5)}{2}\nu_e \\ \dfrac{(1-\gamma_5)}{2}e^- \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

であるととる。もちろん，$\gamma_5\nu_e = -\nu_e$（ニュートリノの質量は０と信じられている）であるから，$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\nu_e = \nu_e$ である。式（7・8）は電子型のレプトンの左回りの弱いアイソ２重子である。これはまた

$$\ell_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L{}^- \end{pmatrix}, \quad e_L{}^- = \frac{(1-\gamma_5)}{2}e^- \tag{7.9}$$

とも書ける。式（7・8）に対する大局的 $SU(2)$ 変換は

$$\delta\begin{pmatrix}\nu_e\\ e_L{}^-\end{pmatrix}=-i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\,\frac{(1-\gamma_5)}{2}\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix} \tag{7.10}$$

である。射影演算子$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$が入っているので，これは“$SU(2)_L$”群である（§6・8を思いだそう）。式（7・10）はもちろん

$$\delta \ell_e=-i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\tau}/2\,\ell_e \tag{7.11}$$

を意味し，これに関連したカレントは

$$\mathbf{j}_\mu=\bar{\ell}_e\gamma_\mu\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\ell_e$$

である。ℓ_eは式（7・8）で与えられる。同じような変換を“右回り”の２重子

$$r_e=\begin{pmatrix}\dfrac{(1+\gamma_5)}{2}\nu_e\\ \dfrac{(1+\gamma_5)}{2}e^-\end{pmatrix} \tag{7.12}$$

に考えると，　$\delta(r_e)=0$　であることがわかる。実際，$\gamma_5\nu_e=-\nu_e$であれば，式（7・12）の上の成員は恒等的にゼロである。しかし，いずれにせよ，r_eは大局的変換のもとでは1重子である。しばしば$SU(2)_L$から添字Lを落すが，誤解はないであろう。

さて，$U(1)$の部分を考えよう。式（6・126）と矛盾を起こさないためには，$SU(2)_L\times U(1)$の共変微分を

$$\partial_\mu+ig\mathbf{t}\cdot\mathbf{W}_\mu+\tfrac{1}{2}g'yB_\mu \tag{7.13}$$

ととる。ここで（不必要な指標はいっさい書込まずに）t_3，y部分は

$$\partial_\mu+igt_3W_\mu{}^3+\tfrac{1}{2}g'yB_\mu \tag{7.14}$$

である。式（6・132），（6・133）より

$$W_\mu{}^3=\sin\theta_W A_\mu+\cos\theta_W Z_\mu \tag{7.15}$$

$$B_\mu=\cos\theta_W A_\mu-\sin\theta_W Z_\mu \tag{7.16}$$

であるから，式（7・13）のA_μ部分は

$$\partial_\mu+i(gt_3\sin\theta_W+\tfrac{1}{2}g'y\cos\theta_W)A_\mu \tag{7.17}$$

である。式（6・133）より，$g'\cos\theta_W=g\sin\theta_W$であるから，式（7・17）は

$$\partial_\mu+ig\sin\theta_W(t_3+\tfrac{1}{2}y)A_\mu \tag{7.18}$$

と書ける。これは“$t_3+\frac{1}{2}y$”が電荷の演算子であり，A_μが電磁ゲージ場であることを示す。したがって，

$$g\sin\theta_W=e \tag{7.19}$$

である。表7・1に量子数の割りつけをまとめておく。式（6・126）は，$y(\phi)=1$ ととったものである。［そうでないと式（6・136）の中の g' を変更しなくてはならない］。

表7・1 粒子の電荷 $Q=t_3+\frac{1}{2}y$

	t	t_3	y	Q
ν_e, ν_μ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
e_L, μ_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R, μ_R	0	0	-2	-1
Higgs 場	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	1	1, 0

この割りつけに従って，理論を局所的に $SU(2)\times U(1)$ 不変にすることができる。これはすべての適切な表示に対して共変微分を書下せばよい。

$$D_\mu \ell_e = \left(\partial_\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}_\mu}{2} - \tfrac{1}{2}ig'B_\mu\right)\ell_e \tag{7.20}$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu - ig'B_\mu)e_R \tag{7.21}$$

$$D_\mu \nu_R = \partial_\mu \nu_R \tag{7.22}$$

ここに，おそらくは自明な ν_R の場合も掲げておいた。また，$e_R=[\frac{1}{2}(1+\gamma)]\times e^-$ の意味である。さて，レプトンとゲージ場の相互作用は，自由なラグランジアンの中で，置き換え $\partial_\mu\to D_\mu$により誘起される相互作用のみであると仮定すれば，決定されてしまう。しかし，完全にゲージ不変なラグランジアンを達成する前に，ひとつ障害がある。どんなレプトンの質量項も，変換 $\psi\to[\frac{1}{2}(1-\gamma_5)]\psi$（§6・8参照）に対して不変ではない。この重要な点を明らかにするため，ψ を

$$\psi = \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi + \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi \equiv \psi_R + \psi_L \tag{7.23}$$

と分解しよう。するとフェルミオンの質量項は

$$m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \tag{7.24}$$

と書ける。$\gamma_5\gamma_0=-\gamma_0\gamma_5$ および $(1-\gamma_5)(1+\gamma_5)=0$ を用いて，$\bar{\psi}_R\psi_R=\bar{\psi}_L\psi_L=0$ だからである。ψ_L と ψ_R は $SU(2)_L$ のもとで異なった変換をするから，式（7・24）は実は大局的 $SU(2)_L$ 不変ではない。したがって，レプトンの質量項を含むことは局所的 $SU(2)_L$ ゲージ不変性もこわしてしまい，くりこみ可能性

にも疑いを抱かせる。この問題はしばらく触れずにおこう。理論ばかりなので，いささか実験の結果を眺めておきたいと切望するからである。実験結果は，レプトンの質量が無視できるような範囲で成立つのである。

ゲージ原理 $\partial_\mu \to D_\mu$ によって導かれた電・弱相互作用のラグランジアンのレプトン場およびゲージ場の部分を見ると次のような諸項がある（電子 e および ミューオン μ の世代のみを考える）。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\bar{\ell}_e \not{D} \ell_e + \mathrm{i}\bar{\ell}_\mu \not{D} \ell_\mu + \mathrm{i}\bar{e}_R \not{D} e_R + \mathrm{i}\bar{\mu}_R \not{D} \mu_R + \mathrm{i}\bar{\nu}_{eR} \not{\partial} \nu_{eR} + \mathrm{i}\bar{\nu}_{\mu R} \not{\partial} \nu_{\mu R} \\
&\quad = \text{自由場の部分} \\
&\quad -g/\sqrt{2}\left(\bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} e^- W_\mu + \text{エルミート共役項}\right) \\
&\quad + e\,\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu \\
&\quad - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W}\ \left(\tfrac{1}{2}\bar{\nu}_e \gamma^\mu \nu_e - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta_W \bar{e}_L \gamma^\mu e_L\right. \\
&\quad \left. + \sin^2\theta_W \bar{e}_R \gamma^\mu e_R\right) Z_\mu + \text{ミューオンの部分}
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

ここに，$g/\sqrt{2}$ の項は慣用の中間ベクトル・ボソン理論の荷電カレント項であり，e の項は普通の電磁カレントの項（e^- に対してはもちろん $Q=-1$），最後の項はこのモデルの中性の弱いカレントの項 $(-g/\cos\theta_W)j^{Z\mu}Z_\mu$ である。

7・3　実験の結果

(1)　現象論的な4フェルミオン理論との関係，ベクトル・ボソンの質量

式（7・25）の荷電カレントを用いて，たとえば $\bar{\mu}$ の崩壊を主要項だけで計算すると，W 粒子の伝播関数の運動量依存性を無視して，

$$
\frac{1}{M_W{}^2}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \tfrac{1}{2}\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_{\mu^-}\bar{u}_{e^-}\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_{\nu_e} \tag{7.26}
$$

を得る。これは Fermi（1934a, 1934b）のもともとの相互作用の型であって，Fermi 結合定数 G_F

$$
\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W{}^2} \tag{7.27}
$$

と同定することができる。式（7・19）を用いて

$$
M_W = \frac{e}{2^{5/4}G_F{}^{1/2}\sin\theta_W} \approx \frac{37}{\sin\theta_W}\ \text{GeV} \tag{7.28}
$$

であることがわかる。以下に見るように，実験的に決められた $\sin\theta_W$ の値は 1/2 より少し小さいようである。M_W の予言値* は，これから〜78 GeV である。式（6・136）より，M_Z の予言値* は$M_Z=M_W/\cos\theta_W$〜89GeV　である。

（2）　W 粒子の幅

W 粒子がレプトン対に崩壊するときの幅は，主要項の桁で容易に計算できて

$$\Gamma_{W\to e\nu}=23\,\mathrm{MeV}/\sin^3\theta_W \tag{7.29}$$

となる。すべての崩壊様式を寄せ集め $\sin\theta_W$ 〜1/2 とおけば W 粒子の全体の幅は数 GeV に達するであろう。この程度の幅と，予言された質量を持つ "W 共鳴" を実験的に観測することができれば，これは確かにゲージ原理の劇的な勝利であろう。

（3）　ν–e 散乱

3 つの興味ある反応がある。

$$\nu_\mu e^-\to\nu_\mu e^- \tag{7.30}$$

$$\bar\nu_\mu e^-\to\bar\nu_\mu e^- \tag{7.31}$$

$$\nu_e e^-\to\nu_e e^- \tag{7.32}$$

はじめの 2 つの反応は，最低次の枝線近似では，Z^0 の交換のみによって起こるが（図 7・1），最後の反応は W^- の交換によっても進行する（図 7・2）。したがって，最低次では，はじめの 2 つの反応は弱い中性カレントの効果として独得のものである。m_e に比べては大きく，M_Z に比べては小さいエネルギー領域で，実効相互作用は式（7・25）より

$$-g^2\,\frac{1}{M_Z{}^2\cos^2\theta_W}\,j_\mu{}^Z j^{Z\mu} \tag{7.33}$$

である。マイナスの符号は頂点や伝播関数の虚数単位からきたもの，$j_\mu{}^Z$ は式（7・25）の括弧の中の項で，式（7・33）の中では $(\cos\theta_W)^{-1}$ の因子をとり出してある。$j_\mu{}^Z$ への ν の寄与は

$$\tfrac{1}{2}\bar\nu\gamma_\mu\nu \tag{7.34}$$

である。電子の寄与は

$$\{-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta_W\bar e_L\gamma_\mu e_L+\sin^2\theta_W\bar e_R\gamma_\mu e_R\} \tag{7.35}$$

*　これらの予言値，および最低次の式を用いて実験から抽出した θ_W の値は，高次の電・弱相互作用の補正によって変わるはずである（Sirlin 1980, Marciano & Sirlin 1981, Llewellyn Smith & Wheater 1981）。実験値については Arnison *et al.*（1983a, 1983b），Banner *et al.*（1983）および Bagnaia *et al.*（1983）を見よ。

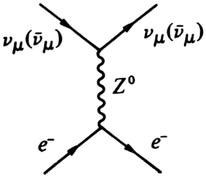


図7・1　$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e^- \to \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)e^-$過程の Z^0 交換図形

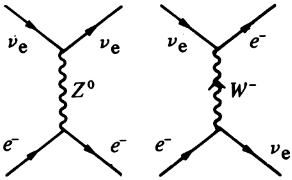


図7・2　$\nu_e e^- \to \nu_e e^-$過程の Z^0 および W^- 交換図形

で，これを

$$\tfrac{1}{2}\{\bar{e}\gamma_\mu e C_V + \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e C_A\} \tag{7.36}$$

と書直すことができる。ここに C_V, C_A は

$$C_V = -\tfrac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W \tag{7.37}$$

$$C_A = +\tfrac{1}{2}, \tag{7.38}$$

である。もちろん

$$\{\bar{e}_L\gamma_\mu e_L C_L + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R C_R\} \tag{7.39}$$

と書けば

$$C_L = -\tfrac{1}{2} + \sin^2\theta_W, \quad C_R = +\sin^2\theta_W \tag{7.40}$$

である。式（7・33）は従って

$$-2\sqrt{2}G_F\bar{\nu}\gamma_\mu\nu\{\bar{e}_L\gamma^\mu e_L C_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R C_R\} \tag{7.41}$$

となる。反応（7・30）の断面積は（電子質量がゼロでない場合に）'t Hooft (1971c) によって計算され，その結果は

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{2G_F{}^2 m_e E_\nu}{\pi} \times \{|C_L|^2 + |C_R|^2(1-y)^2 - \tfrac{1}{2}(C_R{}^*C_L + C_L{}^*C_R)y m_e/E_\nu\} \tag{7.42}$$

である。ここで，$y = E_e'/E_\nu$, E_e' は実験室系での電子の反跳エネルギーである。式（7・42）は ym_e/E_ν 項を含んだ形で引用しておいた。この項は $E_\nu \gg m_e$ であれば無視できるが，もちろんこの章の電子質量をゼロにした理論では導くことはできない（質量を含めることについてはのちの§7・4を見よ）。反ニュートリノ過程（7・31）は，ヘリシティの指標を反転 $C_L \rightleftharpoons C_R$ すれば得られる。y の値について0から1まで積分して，ニュートリノに対しては断面積

$$\sigma_\nu = \frac{2G_F{}^2 m_e E_\nu}{\pi}\{|C_L|^2 + \tfrac{1}{3}|C_R|^2\} \tag{7.43}$$

ただし

$$\frac{G_F{}^2 m_e}{\pi} \sim 0.8 \times 10^{-41}\ \mathrm{cm^2/GeV} \tag{7.44}$$

を，また反ニュートリノに対しては断面積

$$\sigma_{\bar{\nu}} = \frac{2G_F{}^2 m_e E_{\bar{\nu}}}{\pi}\{|C_R|^2 + \tfrac{1}{3}|C_L|^2\} \tag{7.45}$$

を得る。C_L, C_R は式（7・40）によって与えられる。同じような計算を過程（7・32）に行うことができる。

実験の現状についてはしばしば総合報告が行われている。以下に純レプトン過程ではないが，あるほかの過程からの結果を手短かに引用しておこう。以上のモデルは現在の実験データを極めてよく説明する（Kim *et al*. 1981）。パラメターの値は*，

$$\sin^2\theta_W \approx 0.225 \tag{7.46}$$

の程度で，誤差はおよそ±0.015である。

(4)　パリティ非保存の効果

$SU(2)_L \times U(1)$ 理論の特徴的な一連の予言は，γ および Z^0 の交換による図形の干渉により，“みかけ上”電磁過程にパリティを保存しない効果が現われることである。たとえば，ビーム衝突実験の反応

$$e^+e^- \to \mu^+\mu^- \tag{7.47}$$

は中間状態が1光子の状態のみならず1 Z^0 粒子の状態を通じても進行する。この効果は $C_V C_A$ の干渉項に比例し，したがって式（7・37）から経験的な近似式　$2\sin\theta_W \approx \frac{1}{2}$　のため必然的に押えられている。しかし，相対的な Z^0 の効果は重心系のエネルギー E と共に増大し，$E \geqslant 20$ GeV では，たとえばBundy (1973) の実験が示すように，γ–Z 干渉によるパリティ非保存の効果は検出可能である。パリティ非保存の効果は偏極した電子対の消滅によるミューオン（またはタウ粒子 τ のほうがおそらく容易）の縦偏極および角分布（非対称性）に現われる。今まで観測されたほかのパリティ非保存の効果は，純レプトン過程でない反応を含むので，ほかの実験結果といっしょに§7・5で述べる。

7・4　より完全なラグランジアン

式（7・25）の諸項は，レプトンとゲージ場の電・弱相互作用を論ずるには十

* p.125の脚注参照。またのちの式（7・81）のあとの議論を見よ．

分であるが，もちろん，全ラグランジアンはもっと多数のほかの項を含む。すでに知っている項を数え上げてみよう。

(i) W の自由な Yang-Mills のラグランジアン［式（3・49）参照］

$$\mathscr{L}_{\mathrm{W}} \equiv -\tfrac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}^{\mu\nu}$$

(ii) B の自由なラグランジアン

$$\mathscr{L}_{B} \equiv -\tfrac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_{B}^{\mu\nu}$$

(iii) 式（7・25）のレプトン部分　$\equiv \mathscr{L}_{\mathrm{leptons}}$

(iv) Higgs 部分［式（6・124），（6・126）参照］

$$\mathscr{L}_{\phi} \equiv (D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)+\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^\dagger\phi-\tfrac{1}{2}\lambda^2(\phi^\dagger\phi)^2$$

(v) 一般には式（6・139）の中のゲージを決める項，これを $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ とおく。

ここで，レプトンに質量を与える方法を考える。これは大局的および局所的ゲージ不変性をこわさないように行わなくてはならない。基本的な考え方は

$$g_{\mathrm{s}}\bar{\psi}\psi\phi \tag{7.48}$$

の形の湯川型の結合をレプトン場 ψ と Higgs 場 ϕ の間に導入することである。平行移動（6・130）［あるいはより一般的なゲージでは式（6・138）］を行い，

$$g_{\mathrm{s}}\bar{\psi}\psi f/\sqrt{2} \tag{7.49}$$

の形の項および相互作用の項を集める。式（7・49）はレプトンの質量項の形をしている。

もちろん，これは§6・8の σ モデルで採用したメカニズムそのものである。式（7・24）を思いおこすと，現実のレプトン質量項は　$m(\bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}+\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}})$　という形をしており，ϕ はこの特別な組合わせに $SU(2)\times U(1)$ 不変な形で結合しなくてはならない。表7・1を参照すれば，$\bar{e}_{\mathrm{R}}$ は弱いアイソ1重子で量子数 $y=-2$ を生成し，ℓ_{e} は弱いアイソ2重子で量子数 $y=-1$ を消滅させ，$\phi^\dagger$ はアイソ2重子で $y=+1$ を生成する。したがって，組合わせ

$$g_{\mathrm{s}}(\bar{e}_{\mathrm{R}}\phi^\dagger\ell_{\mathrm{e}}+\text{エルミート共役項}) \tag{7.50}$$

は大局的（および局所的）に $SU(2)_{\mathrm{L}}\times U(1)$ 不変である。$g_{\mathrm{S}}=-\sqrt{2}m_{\mathrm{e}}/f$　と選び，平行移動（6・130）を行うと，式（7・50）は要求にかなう電子質量項

$$-m_{\mathrm{e}}(\bar{e}_{\mathrm{R}}e_{\mathrm{L}}+\bar{e}_{\mathrm{L}}e_{\mathrm{R}}) \tag{7.51}$$

を生ずる。これに類似したミューオン（およびその他の重いレプトン）の質量項がつけ加わってもよい。

上のパラメター f［$f/\sqrt{2}$ は ϕ の真空期待値 $|\mu|/(\sqrt{2}|\lambda|)$ であることを思い出そう］は G_{F} と

$$f=\frac{1}{2^{1/4}G_{\mathrm{F}}{}^{1/2}}\approx 246\,\mathrm{GeV} \tag{7.52}$$

のように関係している［式（6・135），（7・27）参照］。この値は理論から予言されたものではないことを強調しておく。したがって，結合の強さ g_{S} は電子に対して

$$|g_{\mathrm{S}}|=\sqrt{2}m_{\mathrm{e}}f^{-1}\approx 3\times 10^{-6} \tag{7.53}$$

となり，ミューオンに対してはおよそこの200倍，より重いレプトンに対しては質量に比例してさらに大きくなる。現在までに展開された理論では，レプトンの質量のみならず，もちろん ϕ 場の質量 μ も予言することはできない。実際，もし必要とあれば，ゼロでないニュートリノの質量もゲージ不要な形でとり入れることができる。これらすべての質量，また理論をハドロンを含むように拡張したとき（次節参照）のクォークの質量も，現在のところ自由なパラメターとして受入れざるをえない。（より大きい群の構造を考えれば，いくつかの質量の間にある関係を与えることができる。§7・6を見よ。）

7・5 ハドロンの包摂

クォークの場をラグランジアンの中に含めることによってハドロンを導入する。クォーク項は実際はレプトン項とかなりよく似ている。クォークが（おそらくQCDの相互作用を通じて）どのようにハドロンを“作り上げる”かは，ここでは論じない。“複合”粒子としてのハドロンに対しては無理かもしれないが，“素”粒子としてのクォークには簡単な電・弱相互作用が存在するのであろう，と願うのである。とにかく，クォークは局所的ゲージ不変性（したがってくりこみ可能性）をこわさないようにラグランジアンの中に導入しなくてはならない。これはかなり強い制限である。ラグランジアンのクォークを含む部分は，$SU(2)_{\mathrm{L}}\times U(1)$ 群のもとに大局的対称性を示し，対称性はゲージ化（局所的にすること）以前および $\langle 0|\phi|0\rangle\neq 0$ によって破れた相に移る以前では正確な対称性でなくてはならない。この大局的対象性のNoetherカレントは，レプトンの場合に見たように［式（7・11）以降を式（7・25）と比較せよ］，ゲージ場に結合する量でクォークの弱いカレントと解釈できるものである。これから，カレントの量子数だけに基礎をおいた選択規則を導き，また［深非弾性散乱の領域でパートン（部分子）のモデルを用いて］クォークの電・弱結合の直接の験証を行うことができる。

しかしながら，フレイバーを担うクォークを，あまりに素朴に導入することには難点がある。最も単純明快な形でクォーク・カレントを組込むと，ストレンジネスを変える中性の弱いカレントの強さは，実験的に確立されたほかのカレントの強さと同じ程度になってしまう。しかし，このようなストレンジネスを変える中性カレントの強さには，崩壊の分岐比に示される非常にきびしい上限がある。したがって，無理が生ずる。これに対する解決は次のとおりである。今まで論じてきたレプトンのモデルにクォーク場をとり入れるとき，弱いレプトンのカレント $\mathbf{J}^{\mu}$, $J^{\prime\mu}$ を導入しなくてはならない。クォークのカレントについては，現象論からかなりいろいろの性質が知られている。普通の荷電カレントは次の構造を持つ（たとえば Bailin 1977 を見よ）。

$$\bar{d}'\gamma_{\mu}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)u + \text{エルミート共役項} \tag{7.54}$$

ここで，3つだけのフレイバーの世界では，クォーク場は

$$q=\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \tag{7.55}$$

と表わされる。u, d はハドロンのアイソスピン2重子の成分，s はアイソスピン1重子，u, d のストレンジネスはゼロであるが，s はストレンジネス（－1）を持つ。最後に式（7・54）の d' は，Cabibbo（1963）の角 θ_C（$\theta_c\approx0.22$）を用いて

$$d'=d\cos\theta_C+s\sin\theta_C \tag{7.56}$$

で定義される。これに垂直な組合わせ

$$s'=-d\sin\theta_C+s\cos\theta_C \tag{7.57}$$

を導入すると便利である。カレント（7・54）は

$$\cos\theta_C\bar{u}\gamma_{\mu}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)d+\sin\theta_C\bar{u}\gamma_{\mu}\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)s \tag{7.58}$$

のような項に分解され，この第1項は $n\to pe^-\bar{\nu}_e$ に，第2項は $\Sigma^-\to ne^-\bar{\nu}_e$ に効く。カレント（7・54）は $SU(3)_f$ 8重子カレント（添字 f はフレイバーの意）の一部とみなすことができる。8重子カレントを Taylor（1978）に従って $L_{\mu}'^{\alpha}$ で表わす。

$$L_{\mu}'^{\alpha}=\bar{q}'\gamma_{\mu}\frac{\lambda^{\alpha}}{2}\frac{(1-\gamma_5)}{2}q' \tag{7.59}$$

ここに q' は

$$q' = \begin{pmatrix} u \\ d' \\ s' \end{pmatrix} \tag{7.60}$$

で，λ^α はいつもの $SU(3)_f$ の構造行列である。

式（7・59）で記号 L を用いたのは，左回りのヘリシティ射影演算子 $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$があるからである。これに対応する右回りのカレントをまた

$$R_\mu'^\alpha = \bar{q}'\gamma_\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} \frac{(1+\gamma_5)}{2} q' \tag{7.61}$$

で導入することができる。これに関連する荷量を $Q_L{}^\alpha$，$Q_R{}^\alpha$ と呼べば，これらは $SU(3)_{fL} \times SU(3)_{fR}$の代数を生成する。これは§6・8の $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の代数の一般化である。さらに詳しい点については，Adler & Dashen（1968）を見よ。

ここでの問題は現象論的なカレント $L_\mu{}'^\alpha$ を，前節の弱い $SU(2)_L \times U(1)$ 形式のクォーク・カレントとどのように結びつけるかということである。自明な一手は，カレント（7・59）の $SU(2)_{fL}$ 部分群の部分を，$SU(2)_L$ クォーク・カレントと同定することであろう。

$$? \; J_\mu{}^i \equiv L_\mu'^i \quad (i=1,2,3) \tag{7.62}$$

この選択は，明らかに荷電 W 粒子を現象論的にただしいクォーク・カレント $L_\mu{}'^i$ に，ただしく結びつける。$U(1)$ 部分を

$$\tfrac{1}{2}J_\mu{}^y = J_\mu{}^{\mathrm{em}} - L_\mu'^3 \tag{7.63}$$

と同定するのは合理的のように思われる。$J_\mu{}^{\mathrm{em}}$ はクォークの電磁カレントである。しかし，難点を生ずるのはこの式（7・63）なのである。$L_\mu{}'^3$ を展開すると

$$L_\mu'^3 = (1-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta_C)L_\mu{}^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2\theta_C L_\mu{}^8 - \cos\theta_C \sin\theta_C L_\mu{}^6 \tag{7.64}$$

となり，ここで，$L_\mu{}^6$ はストレンジネスを変える成分を含む中性の演算子である。クォーク場を用いて書けば

$$L_\mu{}^6 = \frac{1}{2}\left\{\sin 2\theta_C \left[\bar{s}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} s - \bar{d}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos 2\theta_C \quad \bar{d}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} s + \bar{s}\gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d\right]\right\} \tag{7.65}$$

である。したがって，Z^0 は $J_\mu{}^y$ に結合して，このモデルではストレンジネスの

変わる中性の弱い崩壊を伝達し，その強さは受け入れることのできない大きさに達する。

この難点を克服し，かつゲージの枠をこわさないひとつの方法を Glashow, Iliopoulos & Miani（1970）が示唆した。この方法は少なくとも部分的に，ある種のレプトン・クォーク対称性（後述）を認めたいという願望に沿うものである。GIM は，チャーム $C(c)=+1$ と呼ぶ新しいフレイバーを担い，電荷 $(2/3)e$ を持つ第4番目のクォーク c を導入した。この構想では電荷 $(0,-1,0,-1)$ を持つ4つのレプトン $[\nu_e,\ e^-,\ \nu_\mu,\ \mu^-]$ と，“ずれた”電荷$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ を持つ4つのクォーク $[u,\ d,\ c,\ s]$ がある。レプトンのモデルでは，2つの弱いアイソ2重子

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e_L^-\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu_L^-\end{pmatrix}$$

をとり扱った。GIM の強調した電荷の対応性から言えば，ν_e には u を，ν_μ には c を関連させるべきであろう。その上で，e^- には d を，μ^- には s を，あるいは e^- には s を，μ^- には d を対応させるべきであろう。実はこの種の“対称性”だけからは

$$\left.\begin{aligned} e^- &\to d'=\cos\theta_C d+\sin\theta_C s\\ \mu^- &\to s'=-\sin\theta_C d+\cos\theta_C s\end{aligned}\right\} \tag{7.66}$$

の形を考察することも可能である。いずれにせよ，GIM の提唱は，レプトンとの類推で $SU(2)_L\times U(1)$ カレントを適切に作り上げるためには，基本的なクォークの構造として2組のクォークの弱いアイソ2重子

$$q_u=\begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}_L,\quad q_c=\begin{pmatrix}c\\ s'\end{pmatrix}_L \tag{7.67}$$

を考えざるをえない，ということであった。いつものように，これに対応する右回りのクォーク場はすべて $SU(2)_L$ 1重子である。関係

$$Q=t_3+\tfrac{1}{2}y \tag{7.68}$$

を維持しようとすれば［式（7・18）参照］，

$$y(u)=\tfrac{1}{3}=y(d')=y(c)=y(s')$$

である。したがって，クォークの $SU(2)_L\times U(1)$ カレントは

$$\mathbf{J}_\mu=\bar{q}_u\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_\mu q_u+\bar{q}_c\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\gamma_\mu q_c \tag{7.69}$$

および

$$J_\mu{}^y = \bar{q}_u \gamma_\mu q_u + \bar{q}_c \gamma_\mu q_c. \tag{7.70}$$

である。中性カレント $J_\mu{}^3$ は

$$J_\mu{}^3 = \tfrac{1}{2}(\bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L + \bar{c}_L \gamma_\mu c_L - \bar{s}_L \gamma_\mu s_L) \tag{7.71}$$

で，ストレンジネスを変えない。Z^0 はこのカレントと電磁カレント（これもストレンジネスを変えない）との線型結合に結びつき，この理論の最低次では $\Delta S \neq 0$ の中性カレントはない。

レプトンのモデルで行ったように，ここで式（7・67）の組合わせでクォーク場を含むような理論に対し，はじめに大局的，次いで局所的に，$SU(2)_L \times U(1)$ 不変になるような理論を書下すことができる。これはレプトンの場合とまったく平行であって，結果をただちに書上げることができる。荷電 W 粒子は

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} d' W^\mu + \text{エルミート共役項} \tag{7.72}$$

のようにクォーク・カレントに結合するが（本質的にはそう作ったのである），もうひとつGIMによって予言された新しい結合

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{c} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} s' W^\mu + \text{エルミート共役項} \tag{7.73}$$

も存在する。クォークの相互作用にもレプトンの相互作用にも，同じ g が表われていることに注意してほしい。これがゲージ相互作用の“普遍性”の一端なのである（§3・3および後述の§8・2の注意5を参照）。

ここで弱い相互作用の概観を行うつもりはないが，話題をまとまったものにするため，GIM 理論の目立った実験的結果を手短かに述べておこう。もちろん，最初のそして最大の成果は，ハドロンの新しい量子数チャームの予言である。チャームの存在は現在ではひろく確認されている（Goldhaber *et al.* 1976, Peruzzi *et al.* 1976, Feldman *et al.* 1977）。チャームを持つ粒子を同定するには，式（7・73）の予言するチャームの変わる崩壊の明確な選択規則を調べるのが明快である。チャームを持つハドロンが，チャームを持たないハドロンに崩壊する半レプトン過程を考えよう（崩壊はまったくクォーク場の項によると考える）。Z^0 を含む過程はチャームについて対角的であるから，W が伝達する過程のみが寄与する。カレント（7・73）は次のような崩壊を誘起する。

$c \to s + \ell^+ + \nu_e$　強さ　$\cos\theta_C$

$c \to d + \ell^+ + \nu_e$　強さ　$-\sin\theta_C$

$\sin\theta_C \ll \cos\theta_C$ であるから，これらの崩壊に対しては，$\Delta Q = \Delta C \approx \Delta S$ である。

したがって，もしチャームを帯びた粒子が，はじめ $C=0$ の状態で半レプトン的に創られ（たとえば ν の相互作用によって），続いて半レプトン的に $C=0$ の状態に崩壊するならば，生成と崩壊のどちらの段階に対しても選択規則 $\Delta Q=\Delta C$ を適用することができ，2つのレプトンの全電荷は0であると予言される。（実験データについては Benvenuti *et al.* 1975a, 1975b, 1975c, Barish *et al.* 1976を見よ。）さて，例としてチャームを帯びたメソン D^+ の非レプトン崩壊を考えよう。D^+ 粒子は構造 $(c\bar{d})$ を持ち，$Q=+1$，$C=+1$，$S=0$ である。この粒子は相互作用（7・73）を通じて，$(s\bar{d})+W^+$ と強さ $\cos\theta_C$ で結合し，W^+ 粒子は相互作用（7・72）を通じて $C=0$ のハドロンに結合し，かつ $S=0$ の状態へは強さ $\cos\theta_C$ で，$S\neq 0$ の状態には強さ $\sin\theta_C$ で結合する。したがって優勢な崩壊様式は振幅 $\cos^2\theta_C$ を持つ $\Delta S=\Delta C$ 過程であり，$\Delta S=0$ 過程は振幅 $\cos\theta_C\sin\theta_C$ を，$\Delta S=-\Delta C$ 過程は振幅 $\sin^2\theta_C$ を持ち，いずれも小さい。故に D^+ 粒子の崩壊は

$$D^+\to K^-\pi^+\pi^+ \qquad (7.74)$$

$$C=1 \quad S=-1$$

のように起こって

$$D^+\to K^+\pi^-\pi^- \qquad (7.75)$$

$$C=1 \quad S=+1$$

のようではないと期待される。これは実験的に観測された結果と一致する（Peruzzi *et al.* 1976）.

チャームを帯びた諸粒子の質量は，およそ≧1.8 GeV の程度であって，チャーム・クォークの質量が1.5 GeVの程度であることを示している。（構成粒子の質量を足して複合粒子の質量とするという単純な見方に従っている。）これはまた，次のような興味深い議論によって GIM が予言した範囲に入ってくる。レプトンの結合（7・13）からの類推により，式（7・15），（7・16）および $g'\cos\theta_W=g\sin\theta_W$ を用いれば，クォーク・カレントの Z^0 への結合は

$$J_\mu{}^Z=\cos^2\theta_W J_\mu{}^3-\tfrac{1}{2}\sin^2\theta_W J_\mu{}^y \qquad (7.76)$$

となる。[これは式(7・25)同様，強さ $g/\cos\theta_W$ を持つ。]この式はまた式(7・63)を用いて書直し，たとえば

$$J_\mu{}^Z=J_\mu{}^3-\sin^2\theta_W J_\mu{}^{\mathrm{em}} \qquad (7.77)$$

と書くことができる。さて，$J_\mu{}^3$ も $J_\mu{}^{\mathrm{em}}$ もストレンジネスを変えないことがわかっているから，G_F の1次の程度でストレンジネスを変える中性の過程は存

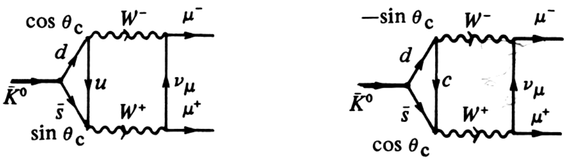
在しない。しかし，観測された分岐比

$$\frac{\Gamma(K_L \to \mu^+\mu^-)}{\Gamma(K_L \to \mathrm{all})} = (9.1 \pm 1.8)\,10^{-9} \tag{7.78}$$

は極めて小さく，2次の寄与の限界を示している。反応 $K_L \to \mu^+\mu^-$ は図7・3a，7・3bに示す過程によって進行する。θ_C が結合（7・72），（7・73）に効いてくる特定の入り方によって，もし $m_u = m_c$ ならば，2つの図形は正確に相殺してしまう。計算によれば振幅の程度は

$$\sin\theta_C \frac{g^4}{M_W{}^2}(m_c{}^2 - m_u{}^2)/M_W{}^2 \tag{7.79}$$

である。したがって，Γ（$K_L \to \mu^+\mu^-$）の評価があまり大きくならないためには，m_c は m_u より勝手に大きくなることはできない。これから m_c は1～3 GeVと見積られる。またJ/ψ粒子の注目に値する諸性質は，今ではそれを $m_c \sim 1.5$ GeVを持つ（$c\bar{c}$）複合粒子とみなすことによってかなりよく理解がゆきとどいている（Aubert *et al.* 1974, Augustin *et al.* 1974）



（a） *u* 交換図形　　（b） *c* 交換図形

図7・3　$\Delta S \neq 0$ の中性の弱い過程 $K_L{}^0 \to \mu^+\mu^-$ に寄与する図形，中間状態に2個の W 粒子を含む。

クォークに拡張された $SU(2)_L \times U(1)$ 理論にとって基本的なことは，もちろん，Z のカレント（7・76）によって伝達される弱い中性カレントの現象がハドロンの弱い相互作用に観測されるはずだということである。事実，このような現象は最初に核子・ニュートリノ非弾性散乱（Hasert *et al.* 1973, Benvenuti *at al.* 1974, Barish *et al.* 1975），次いで核子・ニュートリノ衝突による1パイオン生成反応（Barish *et al.* 1974, Lee *et al.* 1977）において発見された。これらの実験はすべて，クォーク・カレントによる解釈に何かある余分な仮定をつけ加えなくてはならない。たとえば，非弾性ニュートリノ散乱にはパートン模型（Close 1979を見よ）の仮定を必要とする。特に興味深いのは，ハドロンの見かけ上の電磁相互作用が Z^0–γ の干渉によってパリティ非保存の効果を示すと

いう一連の予言である。（§7・3に論じた効果をハドロンに類推したものである。）このメカニズムにもとづく原子物理のパリティ非保存の効果は，最初に Bouchiat & Bouchiat（1974）によって論じられた。実験の状況はだんだん定着してきて，ついに定量的に理論を支持するに至っている。この問題の総合報告に Fortson & Wilets（1980）および Cummins & Bucksbaum（1980）がある。

現在のところ，この種の効果の最も明快な証拠は，SLAC で行われた縦偏極した電子と重陽子の非弾性散乱という古典的実験である（Prescott *et al.* 1978）。この実験では，非弾性的に散乱された電子のフラックス（線束）を，特定のヘリシティを持つ入射電子に対して測る。2つのヘリシティが異なるとき結果が非対称になり，パリティ非保存の明白な信号が得られた。非対称度 A はいろいろなゲージ理論のモデルについて計算され（たとえば Cahn & Gilman, 1978 を見よ），$10^{-4}Q^2$ の程度である。Q^2 は GeV^2 の単位で測った不変運動量移行の値である。（クォーク・パートン模型，あるいはこれに代わる仮定がこれらの計算にも必要である。）最も簡単な $SU(2)_L \times U(1)$ モデルが，$\sin^2\theta_W = 0.20 \pm 0.03$ として A/Q^2 の実験値とよくあう。この $\sin^2\theta_W$ の値はニュートリノの実験から得られた値と矛盾しない。水素を標的としてもある程度のデータが採られているが，結果は重陽子と矛盾せず，ただ誤差がずっと大きい。中性カレントの実験は Kim *et al.*（1981）が分析して総合報告を行っている。

再び，クォークの質量はクォークと Higgs 場の $SU(2)_L \times U(1)$ 不変な湯川結合によって“手で”入れなくてはならない。この結合は対称性の破れが起こるとき質量を生成する。このようなモデルでは，クォークの質量の間にどのような関係も必要としない。

7・6 そのほかのフレイバーと世代：“大統一理論”

いままで定式化してきた4つのフレイバーを持つ理論では，CP 非保存を組込む自明で“自然な”方法がないということをまず注意しておく。（隠れた対称性のメカニズムによって CP 非保存を導入する試みはあった（Mohapatra 1978 の総合報告参照）。しかし，6つのフレイバーを持つモデルでは，CP 非保存を極めて簡単に組入れることができる（小林・益川 1973）。しかし，その値を予言することはできない。

もちろん，クォークが4つ以上のフレイバーで現われると考えねばならない必然的な理由がある。ウプシロン（Υ）粒子族の性質は，ψ 粒子の性質をより

高いエネルギーで再現しているように思われる。これはΥ粒子が（$b\bar{b}$）束縛状態であるという解釈を強く示唆する。b は第5のフレイバーを持つクォークである。レプトンとクォークの対称性は，τ レプトンの発見（Perl *et al.* 1976）によって維持された。τ 粒子は独自のニュートリノ ν_τ を持ち，弱いアイソ2重子 $\tau_{\rm L}$ をなすと期待される。とすれば，b クォークもアイソ2重子を完成するため t クォークを必要とし，6フレイバー理論となる。

次の構図

$$
\begin{array}{cccc}
\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_{\rm L} & \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_{\rm L} & \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_{\rm L} & \ldots ? \\
\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_{\rm L} & \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_{\rm L} & \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_{\rm L} & \ldots ?
\end{array}
\tag{7.80}
$$

のそれぞれの列を世代と呼ぶ。このような“くりかえし”がなぜ必要なのか，理由はまだわかっていない.

この時点で，クォークとレプトンのこの種の電・弱理論に現われるパラメターの数を数え上げておくことは有益であろう。（理由はないが）ニュートリノはすべて正確に質量ゼロであると仮定すれば，9個の質量，4個の一般 Cabibbo 角（クォーク場の混合を記述し，そのうちの1つは CP 不変性を破る位相に対応する），2個のゲージ結合定数 g, g' および（少なくとも）2個の Higgs ポテンシャルのパラメターがある。このほかに§3・4で言及した複数の θ パラメターがある（Belavin *et al.* 1975, 't Hooft 1976, 1978）*。

この段階に達したことすら，極めて大きな進歩であったと言っても過言ではあるまい。現在，提起されている問題の性格は，以前のより現象論的な先入観とは定性的にまったく異なる類いのものである。しかしながら，17個あるいはそれ以上のパラメターを抱える理論は，最終的の理論とみなすことはできない。この理由だけでも，$SU(2)_{\rm L}\times U(1)$ 群をより大きな群の中に埋め込むことを試みるのは有望と思われる。特にこの大きな群は可換因子を持たない（§3・3の注意7を見よ）単純群であると具合がよい.

より大きな対称群を考えるこのほかのかつ極めて魅力的な理由は，QCD のカラー群 $SU(3)_{\rm C}$ をその中に含みうる可能性があるからである。

現在のところ，弱い相互作用も強い相互作用も，すでに確立されている電磁相互作用と同様，ゲージ場の理論であることはほぼ確実であると思われる。こ

* 弱い混合角 $\theta_{\rm W}$ と混同してはならない。

れは局所的対称性の物理像を極めて強力に擁護するものである。この視点は，より大きな単純群のうちで $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ 構造をもつ“大”統一理論への道を開く。いろいろな統一化の構想を詳しく論ずることは，本書の範囲を越えるが，$SU(5)$ 群（Georgi & Glashow 1974）を例として，その特徴的な成果を簡単に述べることにしよう。

ただひとつのゲージ群をもつこのような理論では，ただひとつのゲージ結合定数しかない。その結果，$SU(3)_C$，$SU(2)_L$，$U(1)$ の各部分群に関連した定数の間にある関係が課される。これらの定数は，ただひとつのゲージ結合定数と“Clebsch-Gordon”係数を通じて本質的に結ばれているのである。これは独立なパラメターの数を，少なくともある程度減らす。特に $SU(2)_L$ と $U(1)_y$ の結合定数 g，g' の間にある関係を生じ，弱い混合角［式（6・133）参照］の値を予言することができる。$SU(5)$ 理論では予言値は（Georgi & Glashow 1974）

$$\sin^2\theta_W = \frac{3}{8} = 0.375 \tag{7.81}$$

である。

一見したところ，この値は実験値（7・46）とあまりに離れていて，失望するかもしれない。しかし，“相互作用の強さ”の概念について，まだ触れていなかった視点がある。これは，摂動論の高次の補正は，はじめのラグランジアンに対応する最低次の図形から定義された結合定数の値を変えて（“くりこんで”）しまうとみなされる，という考えである。さらに，この変化はエネルギーに依存する。この効果はもっと詳しく次章で取扱うとしよう。そこでは，非可換ゲージ理論はまさに“実効的な”結合定数がエネルギーとともに変わるという点において，ほかのもろもろのくりこみ可能な場の理論とは異なる，ということを学ぶはずである。非可換ゲージ理論では，エネルギーが増大するに従って結合定数の値は小さくなり，ついにはゼロに向う。この性質は“漸近的自由性”として知られている（Politzer 1973，Gross & Wilczeck 1973）。これと対遮的に，$U(1)$ 可換ゲージ群の実効結合定数はエネルギーとともに増大する。

$SU(2)_L \times U(1)_y$ 群の場合は，g は非可換 $SU(2)_L$ 群に結びつき g' は可換 $U(1)$ 群に結びつく。したがって，エネルギーが増大するとき，実効的な g は減少し，実効的な g' は増大する。$g'/g = \tan\theta_W$ であるから，θ_W はエネルギーとともに増大する。したがって，予言（7・81）は超高エネルギー領域での $\sin^2\theta_W$ を正確に表わし，一方，実験値（7・46）は現在到達できるエネルギー領域での観測値を表わす，と考えることができる。

それでは，実験値（7・46）を理論値（7・81）に"くりこむ"ためには，どれほど高いエネルギー領域に至らなければならないか，という疑問がただちに生ずる。次章でエネルギー依存性は典型的に対数的であることがわかるので，このように大きなくりこみをもたらすエネルギーの尺度は，極めて大きいことが予想される。この線に沿った最初の計算で，Georgi, Quinn & Weinberg（1974）は，対称性の極限（7・81）はほぼ質量（すなわちエネルギー）尺度 10^{14}GeV で達成されると評価した。その後のより精密な見積りも，この値を定性的には変えていない。（Buras *et al.* 1978, Ross 1978, Goldman & Ross 1979, 1980, Llewellyn Smith *et al.* 1981, Llewellyn Smith 1982 b の総合報告を見よ。）

実際，似たような"超重量級"の質量尺度を含むことは，このような統一諸理論の特徴的な性格であると思われる。同じ結論を導くもうひとつの議論は，次のようなものである。大統一理論ではすべて，クォークとレプトンをひとつの共通な多重子の成員と考える。とにかく，ハドロンとレプトンを $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)$ の分類に従って区別する相互作用の強さの違いは，すべての相互作用に同じ根源的な強さを与えようという視点の上からは，当然なくなってしまっていると考えるべきである。このときレプトンをクォークに，クォークをレプトンに変える対称性が存在する。対称群を"ゲージ化"すると，群のそれぞれの生成演算子に対してゲージ量子が現われる。クォーク・レプトンの相互転換を伝達する量子は，図7・4に示すような過程を経てバリオンが崩壊する確率を抑制するため，極めて重くなくてはならない。陽子の寿命の簡単な見積りは

$$\tau_p \sim M_X{}^4/\alpha_G{}^2 m_p{}^4 \tag{7.82}$$

である。ここに α_G は統一化群 G の微細構造定数，X はバリオンの崩壊を伝達するゲージ量子の総括的名称である。式（7・82）より，$\alpha_G \sim 10^{-2}$ ととり，τ_p が現在の限界（$\gtrsim 10^{30}$ 年）と矛盾しないためには，$M_X \gtrsim 10^{14}$GeV の値を得る。かくて前と同じ質量尺度を得た。

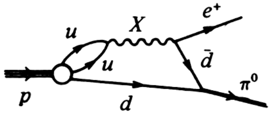


図7・4 陽子の崩壊 $p \to e^+\pi^0$ を起こす過程

陽子の平均寿命は $M_X{}^4$ に比例するから，より定量的な計算を行うことは，

明らかに本質的に重要であって待ち望まれる。これらの計算は M_X，$\sin^2\theta_W$ および τ_p を結びつけ，また以前に与えた M_W，M_Z の簡単な予言値に（5 Gev の程度の）輻射補正を与える。最近の総合報告に Llewellyn Smith（1982 b）がある。陽子の寿命を測定するか，寿命の限界を改良する実験は目下進行中である。たとえば実際に崩壊様式 $p \to e^+ \pi^0$ が観測されたとすれば，これは確かに統一理論が正しい途に向っているという異例の証拠になるであろう（たとえば Weinberg 1981 を見よ）。

したがって，われわれは対称性の破れに関する2つの非常に違った尺度に直面することになる。ひとつは"X"ボソンが質量を獲得する超高エネルギー（～10^{14} GeV）領域で，他は W や Z 粒子が質量を獲得するエネルギー（～10^2 GeV）領域である。2つのエネルギー尺度がどうしてこんなにかけ離れているのか，自然な説明はまだ与えられていない。

クォークとレプトンをひとつの族にまとめてしまう理論の直接の結果として，質量の比が予言される。たとえば $SU(5)$ 理論の予言では

$$
\begin{aligned}
m_e &= m_d \\
m_\mu &= m_s \\
m_\tau &= m_b
\end{aligned}
\tag{7.83}
$$

である(Chanowitz *et al.* 1977, Buras *et al.* 1978, Nanopoulos & Ross 1979)。ここでも再び，式（7・83）の関係はエネルギーが M_X よりずっと大きい対称性の支配領域でのみ成立つと考えられる。したがって，現在到達可能なエネルギー領域に下ってくるまでの間に，大きな(質量の）くりこみ効果が現われると予想される。これらの効果は m_b については信頼できる計算が可能で，その結果 m_b は 5～5.5GeV になると主張されている（Chanowitz *et al.* 1977, Buras *et al.* 1978, Nanopoulos & Ross 1979)。この結果はフレイバー数がちょうど6であるということにも依存し，もしフレイバーの数が増えれば質量の見積りも大きくなる。

2つの論点をつけ加えて結論としよう。第一の点は，すでに注意したように，電磁相互作用を含む $U(1)$ 因子群を持たない任意の単純群は，自動的に電荷を量子化するということである。クォークの分数電荷もまた，この一般的な枠の中で，$SU(5)$ モデルの表示への特定の割りつけによって理解することができる（Georgi & Glashow 1974)。第二の点として，任意の特定のゲージ理論に依らずに，純粋に大局的な対称性は，たとえばバリオン数保存がこれであろうが，

徹底的に局所的対称性を尊重する枠の中では自然な場所を見いだし難いことである。レプトン数についても同じことが言える（Weinberg 1979, Wilczek & Zee 1979）。

8

くりこみの諸問題

くりこみは場の量子論の中心的な問題である。特にゲージ理論にとっては，たとえ非形式的な入門書といえども解説を欠くわけにはいかない。事実，以前の諸章でも数次にわたってすでに触れた。この最後の章で，くりこみのいくつかの重要な局面，特にゲージ理論の当面する諸問題について解説を行おうと思う。(いささか気が引けるが，技術的に詳細な部分はほかの信頼できる文献から借りる。)

くりこみ可能な理論とは，実験から決まる有限個のパラメターを導入し，きちんと決まった計算の方法に従って，(原理的に) 摂動論の任意の高次の次数までいろいろな物理量の計算ができ，その結果が有限になるような理論である。この手続きの主要な考え方は，§8・1でQEDに対して例示する。これにくらべて，くりこみ可能でない理論に対しては，このような手続きはまだ工夫されていない。くりこみの言葉で言えば，このような理論は無限個の任意定数を導入しなくてはならないのであろう。もちろん，このような理論でも実験データに合わせることはできるであろうが，真の予言はほとんどできないように見えることも明白であろう。一方，QEDでは，電気素量 e の値と電子の質量 (および おそらく他の粒子の質量) さえ与えられれば，百万分のいくつの精密さで多くの予言ができるのである。そして，これらの予言は実験的によく験証されている。したがって，現在のところ，そして摂動論ではくりこみ不可能である理論からも有限な物理的予言を得るような方法が発明される日まで，唯一の計算可能な理論はくりこみ可能な理論である。これがくりこみ可能な理論に関心が限られる十分な理由である。

ゲージ諸理論の場合は，くりこみのできる量子化そのものが特別に複雑な問題を抱えている。このような理論にとって基本的な対称性は，振幅にある制約，すなわちWard (1950)－高橋 (1957) のタイプの恒等式およびその拡張を含

むことが判明する。これらの恒等式はいくつかの役割を果たす。まず第一に，これらの恒等式はくりこみ可能性の証明に本質的に寄与し，理論の然るべき物理的解釈を確保するために必要である。（それらはたとえば，物理的な振幅がゲージの選択によらないことや，摂動論的に作られたFeynman図形がユニタリティをみたすことなどを保証する。§8・2参照）

これまで（暗に）議論してきたくりこみの“問題”とは，摂動論で出会う積分の紫外発散の取扱いの問題である。これらの発散を解析する最初の段階として，積分を有限にするある手続きをとり，意味のある計算ができるようにしなくてはならない。このような手続きを“正規化”という。これは理論を一時的に修正し，計算が終わってからその修正をとり除くのである。理論の対称性を尊重する正規化が可能でない場合は，非常に面白い状況が起こってくる。このとき，対応するWardの恒等式は一般に変化し，“特異性”を含むようになる。§8・3で，局所的（ゲージ）対称性の重要な場合を含むいろいろな内部対称性についてこれを論ずる。

§8・4では，この見地から，異なる種類の対称性，スケール不変性の対称性を論ずる。ある意味では，スケール不変性はゲージ理論からは横道の問題である。しかしながら，この問題の議論で本書を終わるのがおそらく適当であろう。というのは，（第1章で指摘したように）ゲージ理論の位相不変性が生れてきたのは，まさにスケール不変性の研究からだからである。さらに，非可換ゲージ理論に独特な“漸近自由性”の重要な性質についても一言するであろう。

8・1　QEDのくりこみ，対立項

QED型の簡単なラグランジアンを考えよう。

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)\psi+e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \tag{8.1}$$

これは電磁場と相互作用する質量m，電荷$-e$のスピノル場（電子と呼ぶことにする）を記述する。ここで明らかにしたい点は，図8・1に示す過程の計算，すなわち電子の伝播関数に対する最低次の補正によって，十分に例示することができる。もともとの伝播関数自身は，4元運動量p^{μ}を持つ電子について

$$\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p)=\frac{\mathrm{i}}{p\!\!\!/-m} \tag{8.2}$$

であり，図8・1の補正は，式（8・2）に

$$\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m}\left[-\mathrm{i}\Sigma^{[2]}(p)\right]\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m} \tag{8.3}$$

の形の項をつけ加える。これは初めと終わりの修正されていない電子の外線を含むからである。量$-\mathrm{i}\Sigma^{[2]}(p)$は，閉線の部分を表わし，外線を含まない。



図8・1 電子の伝播関数に対する仮想光子の最低次の補正

これを電子の自己エネルギーと呼ぶ。上添字はeの冪の2次の寄与であることを意味する。ラグランジアン（8・1）に基づく伝播関数や頂点の規則に従って，その表式は

$$-\mathrm{i}\Sigma^{[2]}(p)=(+\mathrm{i}e)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu \tag{8.4}$$

である。ここに式（4・41）の Feynman ゲージ$\xi=1$をとった。これについてはまた後述する。式（8・4）のただちにわかる難点は，分母にkの冪が3つしかないことから明らかなように，kの大きな値に対して発散することである。（kが小さい極限でも発散するかもしれないことも心配すべきであるが，この“赤外”発散の問題はくりこみとは全然別の問題である。この問題はここでは大半無視する。）

さて，少しでも前進するためには，正規化の手続きを導入しなくてはならない。おそらく，現在最も広く用いられている方法は，'t Hooft & Veltman（1972 a）のみごとな次元正規化の方法である。しかし，いまの目的のためには簡単な切断の方法で十分である。たとえば，光子の伝播関数を

$$\frac{1}{k^2}\to\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2} \tag{8.5}$$

のように修正する。Λは大きい質量で最終的には無限大ととる。Λに依存する振幅$\Sigma^{[2]}(p,\ \Lambda)$は正確に計算できて，その結果は

$$\Sigma^{[2]}(p,\Lambda)=\frac{\alpha}{4\pi}\{3m\ln(\Lambda^2/m^2)-(\not{p}-m)\ln(\Lambda^2/m^2)$$
$$+\ \Lambda\text{を含まない項}\} \tag{8.6}$$

である（Itzykson & Zuber，1980，§7・1・2）。$\Sigma^{[2]}$は対数的発散を示し，式（8・4）のkの指数を計算して予想したものより弱い特異性を持つ。発散は

式（8・6）の定数項および（$\not p-m$）項の係数に影響する。式（8・6）は$\Sigma^{[2]}$を$\not p=m$のまわりで（$\not p-m$）の冪に展開したものと考えられる。（$\not p-m$）のすべての高次の項の係数は$\Lambda\to\infty$のとき有限である。これらは式（8・4）の$\not p$に関する微係数で与えられ，分母の中に余分なkの冪を生じて収束するからである。

図8・1の過程のほかに,図8・2で示される無限級数を考えることができる。

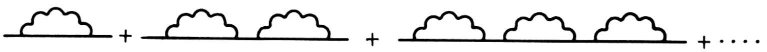


図8・2 図8・1の反覆による補正の和

補正された伝播関数に対して和は

$$\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma^{[2]}(p,\Lambda)} \tag{8.7}$$

である。図8・2のような図形は“インプロパー”あるいは“1粒子可約”図形という。その意味は，フェルミオンの内線を1本取除くと2つの分離した部分に分割できる，ということである。これに対して、図8・1の図形は“プロパー”，あるいは“1粒子既約”図形という。図形は上のように分割できないからである。完全な伝播関数は一般形

$$\mathrm{i}\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p,\Lambda)=\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma(p,\Lambda)} \tag{8.8}$$

を持つ。ここに，Σ（p, Λ）は電子の自己エネルギーのすべてのプロパーな図形（図8・1の形で外線を除去したもの）の和である。冠記号〜の使い方はBjorken & Drell（1965）と異なっていることに注意せよ。

式（8・2）および式（8・7）にもどり，自由な伝播関数（8・2）が$\not p=m$で極を持つのに対して，相互作用の（ある特定の種類の）効果で補正された伝播関数（8・7）は，もはや$\not p=m$では極を持たない。αの程度で式（8・7）の極は

$$\not p=m+\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)+\ \Lambda\text{を含まない項} \tag{8.9}$$

に現われる。ここに

$$\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)=\frac{3\alpha m}{4\pi}\ln(\Lambda^2/m^2) \tag{8.10}$$

である。さらに，式（8・2）の $p=m$ の極の留数はｉであるのに反し，式（8・7）の極の留数はｉではない。伝播関数の極は，粒子が“質量殻の上”に（$p^2=m^2$）あって自由に巨視的な距離を伝播できるような点を，運動量空間で表わす。したがって，式（8・9）の結果に，電子質量の変化を関連させることは自然である。このような質量の“ずれ”は，固体物理では極めて普通のことである。固体物理では固体中の電子の“有効質量”をいつも考えるが，これは固体中の電子が受ける相互作用によって，自由空間中の電子質量が修正を受けた値である。QED の場合，考え方は同じであるが，２つの点に重要な相異がある。まず第一にこの効果は，仮想的な光子の放出・再吸収（真空の量子的ゆらぎ）によって自由な空間で起こっていること，第二に $\Lambda\to\infty$ に伴ってこの効果は無限大になることである。自然そのものによってある物理的な切断が表われてこない限り（自然定数としての基本的な小さい距離あるいは大きい質量？），Λ は無限大に近づくことが許されると仮定せざるをえない。そこでこの事情の意味を了解するため，何かしなくてはならない。

ここで２つの態度がとれるであろう。まず第一に，もともとのラグランジアン（8・1）の中のパラメーター m は実験室で測定される現実の質量ではなかった，と考えることができよう。真空に存在するもろもろの仮想効果を除く方法はないのだから，測定された質量は仮想効果すべてを含むものにちがいない。同様にして，ラグランジアン（8・1）の中の電荷のパラメーター e も，測定された“有効”電荷に修正する。すると物理的な振幅は，もとのラグランジアンの中のパラメーターではなく，修正されたパラメーターを用いて表わすことができる。この手続きは摂動論においては，各次数ごとに系統的に遂行することができる。したがって，最終的に，物理的パラメーターは，もとの結合定数の冪（べき）で順序づけた項の級数として表わされる。級数の各項は形式的に無限大であるが，級数の和は物理的なパラメーターであるから，有限であるはずである。これら物理的パラメーターの値は実験から決める。くりこみ可能な理論では，このようなパラメーターを有限個決めれば，すべてのほかの振幅が有限になる。

この見地は固体物理の諸例と有益な関連があるが，これからあとの議論の展開に最も適しているというわけではない。最終的には多少ちがった方法を考えるほうが望ましい。この第二の方法によれば，ラグランジアン（8・1）に表われるパラメーターは<u>物理的</u>パラメーターである。しかし式（8・1）には“対立項”（あるいは相殺項）と呼ぶ<u>よけいな</u>項をつけ加えて修正する。これらの項の関

数は，ラグランジアン（8・1）だけから計算した振幅の無限大の部分を相殺し，物理的振幅［式（8・1）に対立項を加えたラグランジアンから計算した振幅］はすべて有限である。対立項は摂動論では各次数ごとに（逐次）計算する。ここにαの程度の計算と，このような項の定義や解釈を論ずることにしよう。

例として，式（8・1）に項

$$\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}\psi \tag{8.11}$$

を加えたと考えよう。この項はフェルミオンの質量項の形をしているが（実は通常のDirac項$-m\bar{\psi}\psi$に比べると符号が違っている。後述），$\delta\tilde{m}^{[2]}$はαに依存するので，付加的な相互作用項と解釈される。頂点に対するFeynman規則は，ラグランジアンにiをかければよいから，式（8・11）は図8・3に対応して，αの程度の電子の伝播関数に

$$\frac{\mathrm{i}}{\not p-m}\,\mathrm{i}\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)\,\frac{\mathrm{i}}{\not p-m} \tag{8.12}$$

の寄与を与える。式（8・3）と式（8・12）の寄与は図8・2のように反覆されて

$$\frac{\mathrm{i}}{\not p-m-\Sigma^{[2]}(p,\Lambda)+\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)} \tag{8.13}$$

となる。この分母は

$$\not p-m-\left(\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)-\frac{\alpha}{4\pi}(\not p-m)\ln(\Lambda^2/m^2)+\Lambda\text{を含まない項}\right)$$
$$+\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda) \tag{8.14}$$

であり，無限大の定数項が相殺してしまう。同様な方法で，$\Sigma^{[2]}$の中の$\not p-m$項の無限大の係数も，項

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\ln(\Lambda^2/m^2)\bar{\psi}(\mathrm{i}\not\partial-m)\psi \tag{8.15}$$

を式（8・1）に加えれば打消されてしまう。

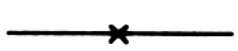


図8・3　電子の伝播関数に対する対立項（8・1）の寄与

新しい項（8・11）や（8・15）を加えると，ラグランジアンは（今考えた図形に対して）有限な電子の伝播係数を与えるが，極の位置は一般に$\not p=m$にはないことに注意しよう。式（8・6）の“Λに依存しない”部分は常に有限で，$\not p\to m$に対してゼロにならないからである。これが実際に起こっていることで，

式（8・1）の質量のパラメター m が有限の修正（くりこみ）を受けるのである。さて，項（8・11），（8・15）には無限大を消去せねばならぬという役割以外，何ら特別な意味はない。何か有限の項を式（8・11），（8・15）につけ加えても，全く同じ役割を果たすことができる。これらの対立項を細工して，式（8・1）の中のパラメター m が実際電子の完全な伝播関数の極の位置になるように，すなわち，電子の物理的質量になるように工夫するほうが便利である（必ずしも本質的に必要ではない）。これは式（8・11）を

$$\delta m^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}\psi \tag{8.16}$$

で置き換え，$\not{p}=m$ に対して

$$\Sigma^{[2]}(p,\Lambda)-\delta m^{[2]}(\Lambda)=0 \tag{8.17}$$

が成立つようにすれば達成される。Itzykson & Zuber（1980）の計算によれば

$$\delta m^{[2]}(\Lambda)=\delta\tilde{m}^{[2]}(\Lambda)+\frac{3\alpha m}{8\pi} \tag{8.18}$$

であって，明らかに対立項の中に有限の変化を生じている。

同様に，式（8・15）に有限部分を加えて伝播関数の中の $\not{p}=m$ における極の留数を変えることができる。この有限部分を，たとえば留数が“自由粒子”の値，すなわち i になるように選ぶことができる。式（8・15）の中の対立項は慣行的に

$$(Z_2{}^{[2]}(\Lambda)-1)\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi \tag{8.19}$$

と書く。したがって，伝播関数はこの次数で，対立項（8・16），（8・19）を含んで

$$\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m-\Sigma^{[2]}(p,\Lambda)+\delta m^{[2]}(\Lambda)+(Z_2{}^{[2]}(\Lambda)-1)(\not{p}-m)}. \tag{8.20}$$

である。$\not{p}=m$ における留数が i になるべしという要求から $Z_2{}^{[2]}$ が決まり，その条件は

$$Z_2{}^{[2]}(\Lambda)-1=\frac{\partial\Sigma^{[2]}}{\partial\not{p}}(p,\Lambda)\bigg|_{\not{p}=m} \tag{8.21}$$

である。明らかに，$Z_2{}^{[2]}=1+O(\alpha)$ である。完全な表式は Izykson & Zuber（1980）を参照せよ。

伝播関数（8・20）は今や有限で，$\not{p}=m$ で極を持ち，その留数は i である。これを

$$i S_F'^{[2]}(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma_R{}^{[2]}(p)} \tag{8.22}$$

と書き，有限な（Λ に依存しない）量 $\Sigma_R{}^{[2]}(p)$ は条件

$$\Sigma_R{}^{[2]}(p)\Big|_{\not{p}=m} = 0 \tag{8.23}$$

$$\frac{\partial \Sigma^{[2]}}{\partial \not{p}}(p)\Bigg|_{\not{p}=m} = 0 \tag{8.24}$$

をみたすとする。［式（8・22）の左辺は Bjorken & Drell（1965） では $i\tilde{S}'_F{}^{[2]}$ と呼ばれている。］さて，以上の手続きの解釈を考えてみよう。われわれは古典電磁気学と量子力学的ゲージ原理（$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$）に導かれて，QED ラグランジアン（8・1）から出発した。次いで，真空中の量子場のゆらぎによる効果に拮抗するため，式（8・16），（8・19）を加えて修正した。もとのラグランジアン（8・1）は有限な電子の伝播関数を与えないが，修正したラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} + \mathcal{L}_{ct} = {} & \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 + \delta m^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}\psi \\ & + (Z_2{}^{[2]}(\Lambda) - 1)(\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi)\end{aligned} \tag{8.25}$$

は，少なくとも α の程度までは与える。式（8・25）の中の最初と最後の項は結合して

$$Z_2{}^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \tag{8.26}$$

を与える。$\delta m^{[2]}$ は α の程度で $Z_2{}^{[2]}$ は $1 + O(\alpha)$ の程度であるから，式（8・26）の中に $\delta m^{[2]}$ の項を含めても差支えない。その結果 α の程度では矛盾なく

$$Z_2{}^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}(i\not{\partial} - m + \delta m^{[2]}(\Lambda))\psi \tag{8.27}$$

を得る。この式はただちに簡単な解釈ができる。“くりこんでいない質量” m_{un} を

$$m_{un} = m - \delta m^{[2]}(\Lambda) \tag{8.28}$$

で，“くりこんでいない場” ψ_{un} を

$$[Z_2{}^{[2]}(\Lambda)]^{1/2}\psi = \psi_{un}(\Lambda) \tag{8.29}$$

で定義すると，これを用いて式（8・27）は

$$\bar{\psi}_{un}(\Lambda)(i\not{\partial} - m_{un}(\Lambda))\psi_{un}(\Lambda) \tag{8.30}$$

と書ける。これはまさに，適当な質量 $m_{un}(\Lambda)$ を持つくりこんでいない場 $\psi_{un}(\Lambda)$

の自由な Dirac ラグランジアンである。これらの量は切断 Λ に依存するが，式（8・30）から計算される電子の伝播関数は少なくとも α の程度まで有限（Λ によらない）であるようになっている。実際，この桁まで伝播関数はくりこんだ形（8・22）を持つ。くりこんでいない質量 $m_{\rm un}(\Lambda)$ とくりこんでいない場 $\psi_{\rm un}(\Lambda)$ は，相互作用によって（まず第一に $\delta m^{[2]}$ を加えることにより，次いでスケール因子 $Z_2^{[2]}$ によって）修正される。

伝播関数（8・20），（8・22）にもどって，有限なくりこんだ伝播関数を α の桁まで書直してみると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}S_{\rm F}'(p) &= \frac{\mathrm{i}}{\not p - m - \Sigma_{\rm R}^{[2]}(p)} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{Z_2^{[2]}(\Lambda)(\not p - m) - \Sigma^{[2]}(p,\Lambda) + \delta m^{[2]}(\Lambda)} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{Z_2^{[2]}(\Lambda)(\not p - m_{\rm un}) + \delta m^{[2]}(\Lambda)(1 - Z_2^{[2]}(\Lambda)) - \Sigma^{[2]}(p,\Lambda)} \\
&\approx \frac{\mathrm{i}}{Z_2^{[2]}(\Lambda)(\not p - m_{\rm un}) - \Sigma^{[2]}(p,\Lambda)} \\
&\approx \frac{\mathrm{i}}{Z_2^{[2]}(\Lambda)(\not p - m_{\rm un} - \Sigma^{[2]}(p,\Lambda))} \\
&\approx [Z_2^{[2]}(\Lambda)]^{-1}\,\mathrm{i}S_{\rm F\,un}'^{[2]}(p,\Lambda)
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

である。$\delta m^{[2]}$，$\Sigma^{[2]}$，$1-Z_2^{[2]}$ は，いずれも α の程度であるからである。式（8・31）の最後の表式は，くりこまれていない量で計算した伝播関数が，物理的な量とくりこまれた自己エネルギー $\Sigma_{\rm R}$ とで計算された伝播関数の Z_2 倍であることを示す。これはまさに式（8・29）から予期されたところである。伝播関数は 2 つのスピノル場の時間順序積の Fourier 変換に比例するからである。



図 8・4 光子の伝播関数に対する仮想 e^+e^- 対（真空偏極）の最低次の補正

もちろん，図 8・1 だけが α の桁の QED 補正ではない。電子の伝播関数の代わりに，光子の伝播関数を考えることができよう。図 8・4 に示す過程によって，光子の伝播関数は修正を受ける。再び Feynman ゲージを用いれば図 8・4 の振幅は

$$\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\rho}}{q^2}\{\mathrm{i}\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}\}\frac{-\mathrm{i}g^{\sigma\nu}}{q^2} \tag{8.32}$$

と表わされ，ここに

$$\mathrm{i}\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}=-(+\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\gamma_\rho\frac{\mathrm{i}}{\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\sigma\frac{\mathrm{i}}{\not k-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}\right) \tag{8.33}$$

である［式（8・3）参照］。式（8・33）の中の余分なマイナス符号はフェルミオンの閉線からくる。式（8・33）の積分は明らかに無限大で，kの冪を数えると，2次の発散であるように見える。前と同じように何か正規化（切断）の方法を導入しなくてはならない。この場合，ゲージ不変性を尊重するような手続きを採用することが決定的に重要である。（すぐ示すことであるが）式（8・33）の発散の程度が，実は対数発散に過ぎないことを証明するのに，ゲージ不変性を使うからである。ひとつの可能性は，Pauli–Villars（1949）の正規化で大きな質量（あとで無限大へもってゆく）を持ち，光子とゲージ不変に結合する余分なスピノル場をつけ加える方法である。もうひとつの可能性は 't Hooft & Veltman（1972 a）の次元正規化の方法である。

§4・4で，2個の光子を含む振幅があるとき，1つの光子の偏極ベクトルをその光子の4元運動量ベクトルで置き換えると，振幅がゼロになることを知った［式（4・71）参照］。図8・4の過程はこのような2光子振幅であるが，もちろん，含まれている光子は一般に実（物理的あるいは外線）光子ではなく，仮想（内線）光子である。しかしながら，たとえばBjorken & Drell（1964），p. 154やItzykson & Zuber（1980），p. 320の示すように，この場合でも

$$q^\rho\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}=q^\sigma\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}=0 \tag{8.34}$$

がやはり成立つ。この関係はWardの恒等式の一例でもあるが，それは次の節で論ずる。この段階では，式（8・34）は実際完全な光子の自己エネルギー（真空偏極）の部分$\Pi_{\rho\sigma}$に対し，すべての次数で成立つことを見越して利用する。これはゲージ不変性の結果である。式（8・34）は

$$\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}(q^2,\Lambda)=(q_\rho q_\sigma-g_{\rho\sigma}q^2)\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda) \tag{8.35}$$

と書くことができる。これは条件（8・34）と矛盾しない最も一般的なLorentz不変な構造を持つからである。式（8・35）が重要なのは，これが式（8・33）がみかけにもかかわらず，2次ではなく対数発散に止まるという本質的な理由になっているからである。$\Pi^{[2]}_{\rho\sigma}$への寄与は，たとえば$m^2g_{\rho\sigma}$に比例すると考えても差支えない。m^2は式（8・35）の中のq^2と平行して次元の上

から導入したものである。実際，正規化を用いて評価するとまさにこのような項が式（8・33）に現われる。式（8・35）の構造を持つ$\Pi_{\rho\sigma}^{[2]}$の部分は対数的に発散する。一方，$g_{\rho\sigma}$だけに比例するその他の部分は2次発散であるように見える。しかし，正規化の質量が無限大になるに従ってこれらの項はゼロになることが判明する。これが起こるためには，正規化の方法がゲージ不変であることが本質的に必要である。定性的に言えば，式（8・35）によって2つの運動量因子を引出したために，$\Pi^{[2]}(q^2,\ \Lambda)$の中の残りの積分の収斂性が改良されたのである。

$\Pi^{[2]}(q^2,\ \Lambda)$の中の対数発散部分は分離することができる。$\Pi^{[2]}$のΛ依存性をあからさまに代入すると

$$\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)=\left\{\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\Lambda^2/m^2\right)+\ \Lambda\text{を含まない項}\right\} \tag{8.36}$$

を得る。ここにΛは大きいフェルミオン質量を表わす（Itzykson & Zuber, 1980参照）。電子の伝播関数の場合とまったく同じように，式（8・36）の中の発散は，然るべき対立項をもとのラグランジアン（8・1）につけ加えてとり除くことができる。この場合対立項は

$$-\tfrac{1}{4}(Z_3{}^{[2]}(\Lambda)-1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{8.37}$$

で，$Z_3{}^{[2]}$は

$$Z_3{}^{[2]}(\Lambda)=1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\Lambda^2/m^2\right) \tag{8.38}$$

である。対立項（8・37）をつけ加えると図8・5に示す余分な寄与を生じ，その振幅は

$$\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\rho}}{q^2}\ \{\mathrm{i}(Z_3{}^{[2]}(\Lambda)-1)(q_\rho q_\sigma-q^2g_{\rho\sigma})\}\ \frac{-\mathrm{i}g^{\sigma\nu}}{q^2} \tag{8.39}$$

である。図8・4，図8・5の寄与はいっしょになって，

$$\mathrm{i}(q_\rho q_\sigma-q^2g_{\rho\nu})\left\{\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\Lambda^2/m^2\right)+\left(-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\left(\Lambda^2/m^2\right)\right)\right.$$
$$\left.+\ \Lambda\text{を含まない項}\right\} \tag{8.40}$$

を与え，これは$\Lambda\to\infty$としても有限である。



図8・5　光子の伝播関数に対する対立項(8・37)の寄与

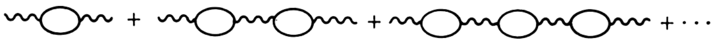


図8・6　図8・4の反覆による補正の和

電子の伝播関数と同じく，図8・6に示される“泡図形”の級数も足し上げることができ，

$$\mathrm{i}\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\mu\nu}=\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}{}^{\mu\nu}+\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}{}^{\mu\rho}\,\mathrm{i}\Pi_{\rho\sigma}{}^{[2]}\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}{}^{\sigma\nu}+\ldots \tag{8.41}$$

である。あるいは，Feynmanゲージでは，$D_{\mathrm{F}}{}^{\mu\nu}(q)=-g^{\mu\nu}/q^2$ とおいて

$$\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\mu\nu}=D_{\mathrm{F}}{}^{\mu\nu}-D_{\mathrm{F}}{}^{\mu\rho}\,\Pi_{\rho\sigma}{}^{[2]}\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\sigma\nu} \tag{8.42}$$

である。式（8・35）を式（8・42）に代入すると

$$q^2[1+\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)]\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\mu\nu}=-g^{\mu\nu}+q^\mu q_\sigma\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\sigma\nu} \tag{8.43}$$

となり，その解は

$$\tilde{D}_{\mathrm{F}}'^{[2]\mu\nu}=\frac{1}{q^2[1+\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)]}\left[-g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\,\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)\right] \tag{8.44}$$

である。対立項（8・37）は，$\Pi^{[2]}(q^2,\ \Lambda)$ を $\Pi^{[2]}(q^2,\ \Lambda)+Z_3{}^{[2]}(\Lambda)-1$ で置き換えれば含めることができる。結果は

$$D_{\mathrm{F}}'^{[2]\mu\nu}=\frac{1}{q^2[\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)+Z_3{}^{[2]}(\Lambda)]}\times\left(-g^{\mu\nu}-\frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\,(\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)+Z_3{}^{[2]}(\Lambda)-1)\right) \tag{8.45}$$

である。この式は次のように解析できる。図8・7に示す過程を考えると，これは式（8・45）に含まれるあらゆる補正を含めた2つの電子の間の光子交換の振幅である。フェルミオンのカレント $\bar{u}\gamma^\mu u$，$\bar{u}\gamma^\nu u$ が図8・7の光子線の両端に現われているから，式（8・45）の中で $q^\mu q^\nu$ 項は無視してよい。[式（8・45）が2つの保存するカレントの間にはさみこまれるときは，いつも同じことが成立つ。] 残りの部分については，q^2 の関数としての極の位置は，電子の場合と同じように，光子の質量（の2乗）を表わす。$Z_3{}^{[2]}=1+O(\alpha)$ であるから，

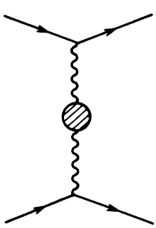


図8・7　2つの電子の間の光子の交換，完全な伝播関数を用いる。

この部分は α の桁で

$$\frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 Z_3{}^{[2]}(\Lambda)(1+\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda))} \tag{8.46}$$

と書くことができる［式（8・31）参照］。さて，$Z_3{}^{[2]}$ は式（8・38）で与えられることは既知なので，式（8・40）の中に対数的無限大はない。実際，計算によれば

$$\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)=\frac{\alpha}{3\pi}\ln(\Lambda^2/m^2)+(q^2\to 0\ \text{とともにゼロになる部分}) \tag{8.47}$$

である。したがって，この桁で

$$Z_3{}^{[2]}(\Lambda)=\{1+\Pi^{[2]}(0,\Lambda)\}^{-1} \tag{8.48}$$

が成立ち，伝播関数（8・46）の極は（対立項をつけ加えてくりこんだ結果）$q^2=0$ にとどまり（光子の質量はゼロ）留数の値は1である。最後の結果は，くりこんだ光子の伝播関数は α の桁で（$q^\mu q^\nu$ 項まで）

$$D_{\mathrm{F}}'{}^{[2]\mu\nu}(q^2)=\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{q^2[1+\Pi_{\mathrm{R}}{}^{[2]}(q^2)]} \tag{8.49}$$

で与えられ，$\Pi_{\mathrm{R}}{}^{[2]}(q^2)$ は有限（Λ に依らない）で，$q^2\to 0$ のときゼロに向う。式（8・49）の q^2 に依存する部分は，真空の偏極効果に起因する Coulomb の法則の修正を含む。これは最初に Uehling（1935）によって論じられた。またこれは水素の Lamb シフトにも寄与する。詳しくは Itzykson & Zuber（1980）p. 327～8を見よ。

さて，電子のときに行ったように，状況を“くりこんでいない”量で解釈してみよう。すでに述べたように，伝播関数（8・49）は図8・7のカレントの演算子に乗ぜられ，ともに電荷 e を含む。したがって，本質的な物理量は

$$\begin{aligned} &e^2/q^2[1+\Pi_{\mathrm{R}}{}^{[2]}(q^2)] \\ &\quad\approx e^2/\{Z_3{}^{[2]}(\Lambda)q^2[1+\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)]\} \\ &\quad=e_{\mathrm{un}}{}^2/q^2[1+\Pi^{[2]}(q^2,\Lambda)] \end{aligned} \tag{8.50}$$

であり［式（8・22），（8・31）参照］，かつ

$$Z_3{}^{[2]}(\Lambda)e_{\mathrm{un}}{}^2=e^2 \tag{8.51}$$

である。一方，ラグランジアン（8・1）の中の$-\frac{1}{4}F\cdot F$項と対立項（8・37）はいっしょになって，

$$-\tfrac{1}{4}Z_3{}^{[2]}(\Lambda)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{8.52}$$

を与え［式（8・30）参照］，これを

$$-\frac{1}{4}F_{\mathrm{un}\,\mu\nu}(\Lambda)F_{\mathrm{un}}{}^{\mu\nu}(\Lambda) \tag{8.53}$$

と書いて

$$[Z_3{}^{[2]}(\Lambda)]^{1/2}A^{\mu}=A_{\mathrm{un}}{}^{\mu}(\Lambda) \tag{8.54}$$

を導入することができる。くりこんでいない電荷 e_{un} はくりこんだ（物理的に測定される）電荷 e によって，$e_{\mathrm{un}}=(Z_3^{[2]}(\Lambda))^{-1/2}e$ と表わされ，くりこんでいない場とくりこんだ場は式（8・54）で結ばれている。

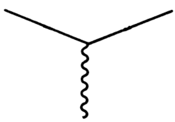


図 8・8　電子・光子頂点の最低次の図形

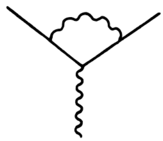


図 8・9　図 8・8 の輻射補正

実際は，電荷のくりこみの問題はこれほど簡単なものではない。とにかく，はじめのラグランジアン（8・1）をふりかえると，あからさまに電荷を含むある 1 つの項に対しては，まだくりこみ（対立項をつけ加えるかもしれぬこと）を論じていないことがわかる。この項は $e\bar{\psi}\not{A}\psi$，であって，図 8・8 に示す 1 次の頂点を与える。再び図 8・9 に示すような頂点の 1 次の補正を考えなくてはならない。今回は単に答を引用するにとどめよう。図 8・9 は対数的に発散し，この発散は

$$e(Z_1{}^{[2]}(\Lambda)-1)\bar{\psi}\not{A}\psi \tag{8.55}$$

の形の対立項によって打消すことができる。ここに $Z_1{}^{[2]}$ は $\Lambda\to\infty$ のとき対数的に発散する。

この項と，ラグランジアン（8・1）の中の第 2 の項との和は

$$eZ_1{}^{[2]}(\Lambda)\bar{\psi}\not{A}\psi \tag{8.56}$$

となる。この表式はまた ψ_{un} を用いて

$$eZ_1{}^{[2]}(\Lambda)\frac{1}{Z_2{}^{[2]}(\Lambda)[Z_3{}^{[2]}(\Lambda)]^{1/2}}\bar{\psi}_{\mathrm{un}}\not{A}_{\mathrm{un}}\psi_{\mathrm{un}} \tag{8.57}$$

と書直すことができ，これからくりこんでいない電荷 e_{un} は実は

$$e_{\mathrm{un}}=eZ_1{}^{[2]}/Z_2{}^{[2]}[Z_3{}^{[2]}]^{1/2} \tag{8.58}$$

である。次の節で式（8・58）についてさらに論ずる。

さて，ここで状勢をまとめておこう。対立項をはじめのラグランジアン（8・・1）につけ加えることにより，図 8・1，8・4，8・9 の“1 閉線”図形を有限にした。これらの項はある程度任意であるが，電子の自己エネルギーを例とし

て論じたように，それらを一意に決める条件の組がある。対立項は質量のずれや，電荷や場のスケールの変化として再解釈することができる。必要と判明した対立項はそれぞれ，もとのラグランジアン（8・1）の中の1項と同じ形をしていたから，この解釈は基本的に可能であった。新しい場や相互作用を導入する必要はない。したがって，（2次の効果の結果として）起こりうるいっさいのことは，ただはじめの場やパラメターが然るべく変化するだけである。

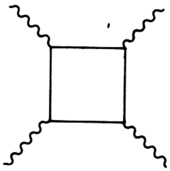


図8・10 $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ 過程の1閉線図形

さて，ここでより複雑な単一閉線図形，たとえば図8・10を考えよう。外線の数が増えると積分は収斂しやすくなり，危険になるかも知れない図形は，実際は図8・10のみであることがわかる［Itzykson & Zuber, (1980), p. 343～4参照］。指数の勘定からは，この項は対数発散をするように思われるが，もしそうであれば，その発散を相殺するために4次の結合，$(A\cdot A)^2$ の形を持つ新しい対立項を導入しなくてはならない。しかし，再びWardの恒等式によって図8・10は実際に収れんし，新しい対立項は必要としないことが判明する。したがって，現在の対立項はすべての1閉線図形を有限にするため十分である。

最後に，以上の手続きは結合の強さ α のすべての次数に対して拡張することができるであろうか，問題にしてみたい。理論がすべての次数でくりこみ可能であるということは，上の手続きを拡張することができ，もとのラグランジアンの構造を変えないような有限個の対立項を導入して，すべての無限大を除去することができることである。これは実際QEDの場合正しい。今や，すべての上添字[2]を除いて，定数 Z_1，Z_2，Z_3 および δm を見いだして，完全なラグランジアン［式（8・1）および対立項］

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = Z_2\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m + \delta m)\psi + Z_1 e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi - \tfrac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \tag{8.59}$$

$$= \bar{\psi}_{\text{un}}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_{\text{un}})\psi_{\text{un}} + e_{\text{un}}\bar{\psi}_{\text{un}}A\!\!\!/_{\text{un}}\psi_{\text{un}} - F_{\text{un}\,\mu\nu}F_{\text{un}}{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_{\text{un}}}(\partial\cdot A_{\text{un}})^2 \tag{8.60}$$

がすべての過程の振幅を有限にすると主張するのである*。対立項の正確な形は，摂動論の各次数において，式（8・23），（8・24）のような条件を添字[2]を除いて拡張したものを用いて，順次に見いだしてゆかねばならない。式（8・59）の主張が完全に証明できることは，実際極めて注目に値する。詳しくはItzykson & Zuber（1980）の第8章を見よ。

今まで見過ごしてきたある技術的な点について，短い注意をしてこの節を終わる。今まで補正のない光子の伝播関数に対して Feynman のゲージだけを考えてきた［たとえば式（8・4）］。より一般的な形（4・44）を代わりに考えることもできるが，そのときは $Z_2^{[2]}$ はゲージのパラメター ξ に依存するであろう。したがって，$Z_1^{[2]}$ もゲージによるが，$Z_3^{[2]}$ と $\delta m^{[2]}$ はゲージによらないことが判明する。（δm がゲージによらないことは物理的に合理的である。質量がゲージによるという解釈はとりたくないからである。）Z_1 も Z_2 も物理的な量ではない。次の節で見るように，両者は実は等しく，その比は式（8・58）から消えてしまい，ゲージによらない量 Z_3 のみを残す。Z_1，Z_2 の間のこの相殺の意義は§8・2で論ずる。

ゲージの問題に関して言えば，ゲージを決定する形の項には対立項を導入する必要のないことを注意しておく。したがって，暗に，式（8・59），（8・60）の最後の2項は等しくなくてはならない。くりこんでいないゲージ・パラメター ξ_{un} を

$$\xi_{\mathrm{un}}=Z_3(\Lambda)\xi \tag{8.61}$$

によって導入するのである。ここでは光子質量の問題を1閉線図形の補正 $\Pi^{[2]}$ との関連で論じた。完全な $\Pi(q^2)$ は非摂動論的な効果によって，$q^2=0$ に極を生ずる可能性を初めて指摘したのは，Schwinger（1962）であった。もしそうであれば，光子は質量を持つであろう。現在では，この状況を隠れたゲージ対称性の立場から解釈する。$q^2=0$ における $\Pi(q^2)$ の極は，光子に結合する質量を持たない Goldstone 量子に対応し，§6・9で論じたメカニズムに従って質量をずらす役目をする。したがって，QED のゲージ不変性が隠れているのでなければ，光子の質量はゼロのままである。

最後にもう一度赤外発散の問題に関して一言する。光子に小さい質量を与えれば，これを処理することができる，とだけ述べておく。したがって式（6・114）の形の伝播関数を用いることが必要である。詳しくは Itzykson & Zuber（1980）

* QED の予言の現況については木下（1979）の総合報告を見よ。

を見よ。Z_1，Z_2 は赤外発散を持つが，δm と Z_3 は持たない。これらの赤外発散は，やわらかい（エネルギーの小さい）光子の制動輻射の寄与をとりいれると，物理的な断面積からは消去されてしまう［たとえば Bjorken & Drell（1964），p. 172〜6 を見よ］。

8・2 Ward–高橋の恒等式

"Ward–高橋の恒等式" という総括的な名前は，理論の持つ対称性によって，理論の振幅がみたさなければならない関係式をさす。すでに見たように，場の量子論の大局的対称性は，荷量の保存やこれに関連した微分型のカレント保存則を導く。典型的に言えば，Ward の恒等式は，このような対称性のカレントが発散をもたないということから出てくる。結果として生ずる諸恒等式には，たくさんの用途がある。その一部はたとえば QED の場合にすでに以前の諸章で言及した。これらの恒等式は，ゲージ理論では特に重要である。ゲージ理論はすぐれて対称的な理論だからである。この節では，Ward の恒等式のある重要な局面を論じよう。

Ward（1950）自身によって導かれた恒等式から始める。この式は QED のくりこみ定数の間の関係

$$Z_1 = Z_2 \tag{8.62}$$

を証明するために用いられた。Z_1 は式（8・56）で与えられる頂点のくりこみ定数である。この恒等式は電子・光子の頂点と電子の伝播関数との関係を与えるが，まず最初に完全な頂点関数を定義しなければならない。次のような段階に従ってこれを行う［Itzykson & Zuber（1980），p.p. 409〜10］。まだ対立項を入れていないラグランジアン（8・1）を考える。頂点 V_μ を

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}e(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)V_\mu(p',p) \\ &\quad=\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z \exp \mathrm{i}(p'\cdot y - p\cdot z - q\cdot x) \\ &\qquad\times \langle 0|T(A_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(x))|0\rangle \end{aligned} \tag{8.63}$$

で定義する。次に，時間順序積の真空期待値はそれぞれの場の伝播関数を含み，Fourier 変換を行うと，V_μ の中に因子として表われることに注意する。

$$V_\mu(p',p) = \tilde{D}'_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)\,\mathrm{i}\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p')\Lambda^\nu(p',p)\,\mathrm{i}\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p) \tag{8.64}$$

Λ^ν は完全な電子・光子の頂点であって，摂動論の最低次では単に γ^μ である。

$\tilde{S}_F', \tilde{D}_F'$ は対立項を入れない完全な伝播関数であるが［式（8・8）参照］，然るべく正規化されている（切断に依存することをあからさまに記さないことがしばしばある）。

さて，Ward の恒等式とは次式である。

$$\Lambda_\mu(p,p)=\frac{\partial}{\partial p^\mu}\,[\not p-m-\Sigma(p)]=\frac{\partial}{\partial p^\mu}\,[\tilde{S}_F'^{-1}(p)] \tag{8.65}$$

あるいは

$$\Lambda_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\Gamma_\mu(p',p) \tag{8.66}$$

とおけばまた

$$\Gamma_\mu(p,p)=-\frac{\partial}{\partial p^\mu}\,[\Sigma(p)] \tag{8.67}$$

とも書ける。式（8・65），（8・67）の証明はすぐ行うが，その前に式（8・62）を式（8・67）から導いておこう。ラグランジアン（8・1）に従って摂動論で Γ_μ を計算するとき，最初の寄与は図 8・9 の図形が与え，その振幅は

$$\Gamma_\mu{}^{[2]}(p',p)=(+\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{-\mathrm{i}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma_\nu\,\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}$$

$$\times\,\gamma_\mu\,\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\,\gamma^\nu \tag{8.68}$$

である。積分は対数的に発散し，この発散は前節に論じた対立項 $e(Z_1{}^{[2]}-1)\times\bar\psi A\psi$ によって消去される。すべての次数にわたり，くりこんだ頂点関数 $\Lambda_\mu{}^R(p',p)$ を

$$\Lambda_\mu{}^R(p',p)=Z_1\Lambda_\mu(p',p) \tag{8.69}$$

で，あるいはこれと同等であるが

$$\Gamma_\mu(p',p)=\gamma_\mu(Z_1{}^{-1}-1)+Z_1{}^{-1}\Gamma_\mu{}^R(p',p) \tag{8.70}$$

で定義することができる。式（8・69）は確かに理解しやすい。対立項も含めて，完全な相互作用は $eZ_1\bar\psi\not A\psi$ であるから，その行列要素は $e\bar\psi\not A\psi$ の行列要素の Z_1 倍である。因子 Z_1 は，（前節に与えた）くりこんだ電荷と場と，くりこまない電荷と場の間の関係を通じて追ってゆくことができる。式（8・70）で $\Gamma_\mu{}^R$ は，$p^2=m^2$ をみたす質量殻上のスピノルに対し

$$\bar u(p)\Gamma_\mu{}^R(p,p)u(p)=0 \tag{8.71}$$

のように規格化されている。さて式（8・31）をすべての次数に拡張して用いる。式（8・67）に現れる Σ とくりこんだ自己エネルギー $\Sigma_R(p)$ との関係は

$$[\not p - m - \Sigma_{\mathrm{R}}(p)] = Z_2[\not p - m_{\mathrm{un}} - \Sigma(p, \Lambda)] \tag{8.72}$$

である。これはまた

$$\Sigma(p, \Lambda) = \delta m - [Z_2{}^{-1} - 1](\not p - m) + Z_2{}^{-1}\Sigma_{\mathrm{R}}(p) \tag{8.73}$$

とも書ける。式（8・73），（8・70）を式（8・67）に代入し，質量殻上の行列要素をとると，Z_1，Z_2 の間の関係が得られる。式（8・73）から

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}(p, \Lambda) = -\gamma_\mu (Z_2{}^{-1} - 1) + Z_2{}^{-1}\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{R}}}{\partial p^\mu} \tag{8.74}$$

が出る。しかし Σ^{R} は質量殻上のくりこみ条件（8・24）をみたすから，式（8・67），（8・70），（8・71），（8・74）より

$$Z_1 = Z_2 \tag{8.75}$$

が導かれる。

関係（8・75）の意義を論ずる前に，式（8・67）の証明を手短かに考えよう。最低次では，関係式

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}(\not p - m)^{-1} = -\frac{1}{\not p - m}\gamma_\mu \frac{1}{\not p - m} \tag{8.76}$$

を式（8・4）の中で用いて式（8・68）と比較すれば，恒等式が成立していることはただちにわかる。より直観的には，伝播関数と頂点関数の間に簡単な関係があることは期待してよい。相互作用はゲージ不変な置き換え

$$\not p \to \not p + e\not A \tag{8.77}$$

によって導入され，これは自由な伝播関数に現われる運動量項 $\not p$ を修正するからである。実際，式（8・67）は図形によって証明することもできる［Itzykson & Zuber（1980），pp. 336～7］。ここには式（8・63）にもとづいた一般的な証明の主要な段階を略述する。これはカレント保存則の役割を明らかにする。式（8・63）の真空期待値は電磁場 A_μ を含む。図形的に展開して言えば，1本の自由な外光子線を含み，図形の他の部分とはカレント j_μ で結合している図形を問題にするのである。したがって，

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4z \exp \mathrm{i}(\bar{p}' \cdot y - p \cdot z - q \cdot x) \\
&\qquad \times \langle 0|T(A_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle \\
&= -\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4z \exp \mathrm{i}(p' \cdot y - p \cdot z - q \cdot x) \\
&\qquad \times \langle 0|T(j^\nu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle
\end{aligned} \tag{8.78}$$

である。上の式に q^μ を縮合し，左辺に式（8・63），（8・64）を用いると

$$e(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)q^\mu\tilde{D}'_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p')\Lambda^\nu(p',p)\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p)$$
$$=q^\mu D_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\exp\mathrm{i}(p'\cdot y-p\cdot z-q\cdot x)$$
$$\times\langle 0|T(j^\nu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle \tag{8.79}$$

である。しかし次の関係

$$q^\mu\tilde{D}'_{\mathrm{F}\mu\nu}(q)=q^\mu D_{\mathrm{F}\mu\nu}(q) \tag{8.80}$$

も成立つ。これは2次まで式（8・34）と同等であり，カレントの保存の結果としてすべての次数で成立つ。これ自身が“Ward の恒等式”なのである［Itzykson & Zuber（1980），p. 408］。しかし，$q^\mu D_{\mathrm{F}\mu\nu}$ は q_ν に比例するので式（8・79）は

$$e(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)q_\nu\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p')\Lambda^\nu(p',p)\tilde{S}'_{\mathrm{F}}(p)$$
$$=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\exp\mathrm{i}(p'\cdot y-p\cdot z-q\cdot x)\partial_{x\nu}$$
$$\times\langle 0|T(j^\nu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle \tag{8.81}$$

となる。ここで部分積分を右辺に行った。

さて，式（8・81）の中の時間順序積の勾配をとる操作を考えよう。ϕ をスカラー場として簡単な実例

$$\partial_{x\nu}\langle 0|T(j^\nu(x)\phi(y))|0\rangle \tag{8.82}$$

を計算してみれば，十分その要点が示されるであろう。

$$T(j^\nu(x)\phi(y))=\theta(x_0-y_0)j^\nu(x)\phi(y)+\theta(y_0-x_0)\phi(y)j^\nu(x) \tag{8.83}$$

であるから，勾配の中の時間微分は θ 関数に作用すると δ 関数を生ずる。カレントの保存条件

$$\partial_{x\nu}j^\nu(x)=0 \tag{8.84}$$

を用いると

$$\partial_{x\nu}\langle 0|T(j^\nu(x)\phi(y))|0\rangle=\delta(x_0-y_0)\langle 0|[j^0(x),\phi(y)]|0\rangle \tag{8.85}$$

である。式（8・81）へ拡張すると

$$\partial_{x\nu}\langle 0|T(j^\nu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle$$
$$=\langle 0|T\{[j^0(x),\psi(y)]\delta(x_0-y_0)\bar{\psi}(z)$$
$$+\psi(y)[j^0(x),\bar{\psi}(z)]\delta(x_0-z_0)\}|0\rangle \tag{8.86}$$

となる。j^μ は単に $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ であるから，同時刻の正準交換関係から式（8・86）

の中の交換子を計算することができる。その結果は

$$[j^0(x), \psi(y)]\,\delta(x_0 - y_0) = e\psi(x)\delta^4(x-y) \tag{8.87}$$

$$[j^0(x), \bar{\psi}(z)]\,\delta(x_0 - y_0) = -e\bar{\psi}(x)\delta^4(x-z) \tag{8.88}$$

である。式（8・81）は，$\langle 0 \,|\, T(\psi\bar{\psi}) \,|\, 0\rangle$の形の２項に帰着し，それぞれ $\tilde{S}'_{\rm F}$ と簡単な関係で結びついている。

特に，式（8・86），（8・87），（8・88）を式（8・81）に代入し，平行移動不変性によって運動量の保存因子をとり出せば

$$\tilde{S}'_{\rm F}(p')\, q_\nu \Lambda^\nu(p, p')\tilde{S}'_{\rm F}(p) = \tilde{S}'_{\rm F}(p) - \tilde{S}'_{\rm F}(p') \tag{8.89}$$

あるいは

$$\begin{aligned} q_\nu \Lambda^\nu(p, p') &= \tilde{S}'^{-1}_{\rm F}(p') - \tilde{S}'^{-1}_{\rm F}(p) \\ &= [\not{p}' - m - \Sigma(p')] - [\not{p} - m - \Sigma(p)] \end{aligned} \tag{8.90}$$

を得る。ここに，$q = p' - p$ である。$q = 0$ で，p'_μ について微分してやれば

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\mu}\,[\tilde{S}'^{-1}_{\rm F}(p)] \tag{8.91}$$

が出る。式（8・90）は運動量移行がゼロでない時に成立するより一般的な関係式で，はじめて高橋（1957）が導いた。

関係式 $Z_1 = Z_2$ の重要性とは何であろうか。くりこんでいない電荷とくりこんだ電荷との間の関係（8・58）をすべての次数に拡張した関係

$$e_{\rm un} = eZ_1/Z_2 Z_3^{\;1/2} \tag{8.92}$$

が実際には

$$e_{\rm un} = e/Z_3^{\;1/2} \tag{8.93}$$

になることが本質的な点である。換言すれば，電荷のくりこみはまったく真空偏極の効果にのみ由来し，波動関数のくりこみ（Z_2）や頂点のくりこみ（Z_1）にはよらない。後者は一般に，光子に結合する粒子（e^-，μ^-，p，……など）が異なれば異なる。しかし，式（8・93）の中ではそれらは打消しあって，すべての粒子種にとって普遍的なくりこみ因子 $Z_3^{-1/2}$ のみを残す。くりこんだ電荷とくりこまない電荷との比は，粒子の種類に依らない。したがって，くりこんでいない電荷の１組がすべて同じであれば――ゲージ型の理論については正確にそうである――，くりこんだ電荷も同じである。すなわち，ゲージ理論の特徴である“結合の普遍性”の本質的概念は，くりこみを行っても変わらない。（もちろん，これは電荷の量子化の問題とはまったく関係ない。§７・６に簡

単に言及してある。）また次のことに注意すれば要点を極めて簡単に把握できるであろう。置き換え

$$p^{\mu} \to p^{\mu} + e_{\mathrm{un}} A_{\mathrm{un}}{}^{\mu} \tag{8.94}$$

は，式（8・93）と定義 $A_{\mathrm{un}}{}^{\mu} = \sqrt{Z_3} A^{\mu}$ を用いれば

$$p^{\mu} \to p^{\mu} + eA^{\mu} \tag{8.95}$$

と同じである。

これらの概念の極めて重要な拡張がFeynmanとGell–Mann（1958）によって行われた。中性子のベータ崩壊のベクトル相互作用の強さは（Cabibbo因子 $\cos\theta_C$，および輻射補正を除いた上で），純レプトン過程のミューオン崩壊のベクトル相互作用の強さと，実験的に等しいことがわかっている。この状況を，レプトン結合とハドロン結合の強さの間のある対称性として解釈したい，というのは自然な傾向であろう。しかし，もしこの対称性がくりこんでいない強さに対して成立つと仮定するならば，ハドロンにはあるがレプトンにはない強い相互作用のくりこみ効果によって，この関係はくつがえってしまうと予想される。また，くりこんでいない結合の強さがはじめは等しくなく，くりこみを行うとちょうど同じ強さになると考えるのもはなはだ奇怪である。くりこんでいない強さの間のこのような相等性は，もし，この強さが事実上ある保存する“荷量”およびこれに関連する発散のないカレントに対応するものであれば，くりこみを行っても変わらない。すなわち，Wardの恒等式により，“荷量”のくりこみはカレントに結合する粒子の種類によらない。

そこで，Feynman と Gell-Mann は，ストレンジネスの変わらない崩壊では弱いベクトル・カレントは発散を持たず，これに対応する弱い荷量（ベクトル結合定数）は保存して普遍的な値を持つ，と仮定した。これらの“弱い荷量”は，ハドロンのアイソスピンの演算子のように働く（たとえば，$n \to pe^- \bar{\nu}_e$では中性子を陽子に“上げる”）。すでに§6・8で論じたように，弱い荷量の中から（今や普遍的な）強さを抽き出して残りをアイソスピンの演算子と同定するのは，極めて自然であろう。するとこれに対応する弱いカレントは，まさに対称群 $SU(2)_{\mathrm{isospin}}$ のアイソスピン・カレントである。この構想はストレンジネスの変わる遷移も含むように一般化することができ，関連する弱いカレントをフレイバー群 $SU(3)_f$ の対称性のカレントとみなす。（フレイバー群がよい対称性であるかぎりカレントも保存する。）

もちろん，保存するベクトル・カレントの仮設（CVC仮説）は，くりこん

でいない結合定数の間の相等性を主張してはいるが，この相等性あるいは普遍性を説明してはいない。すでに見てきたように，QED の類似した状況はゲージ場の概念で極めて自然に理解される。普遍的な置き換え $p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$ が，電荷 q を持つすべての粒子に行われるのである。この置き換えは，電荷の保存に結びついた大局的位相不変性を，実効的に局所的にする段階である。このことから，（ベクトル型の）弱い相互作用も何かある局所的対称群に関連したゲージ場によって伝達されるのであろう，という示唆を受ける。この線に沿う考えは Bludman (1958) によって進められ，弱い相互作用のみについて $SU(2)_L$ ゲージ理論が考察された。Glashow (1961) は，群を $SU(2)_L \times U(1)$ にひろげることにより，電磁相互作用と弱い相互作用を共通の枠に含めることに成功し，重要な貢献をした。[同様な着想は Salam & Ward (1964) によっても進められた。] ベクトル中間子の質量の問題は，もちろん当時は未解決であった。Higgs 機構と Glashow のゲージ群との結びつきは，前章に説明した Glashow-Salam-Weinberg 理論に結実した。

式 (8・81) ～式 (8・89) のような計算は，ほかの多くの場合にも遂行できる。電磁カレントの保存と交換関係 $[j^0(x), j^\mu(y)]$ がゼロになることから導かれる簡単な結果 (4・71) は，物理的な散乱振幅に対する“Ward 型”の恒等式の一例である。この恒等式は，光子の望ましからぬ偏極状態を消去し（§4・4 参照)，また Compton 散乱の摂動論によらない低エネルギー極限定理を導くのに利用される [Itzykson & Zuber (1980), pp. 536～7]。分散関係式と結びつけると，このような低エネルギー定理は和法則を導く。de Alfalo *et al.* (1973) の本には多くの実例が掲げてある。

Ward 型の恒等式が物理的振幅に対して成立すべしと要請すると，多数の重要な問題がひき起こされることを強調しておかなくてはならない。特に，物理的振幅は明らかにくりこんだ振幅でなくてはならない。しかし，今まで行われた計算はすべて，正規化された振幅を含み対立項を含んでいない。正規化の手続きが Ward の恒等式に与えるかもしれない影響については，この節の最後にとりあげ，さしあたり次の例で議論する。恒等式が正規化の手続きによって影響を受けないと仮定すれば，対立項は恒等式を変えないことを験証しなくてはならない。この問題は Itzykson & Zuber (1980), §8・4・3 に論じられている。結論は，くりこんだ振幅は正規化の手続きを経たくりこんでいない振幅と因子（いろいろな Z）だけの違いしかなく，したがって恒等式は物理的振幅

に対しても成立するというのである。

まったく同様な方法を，弱い相互作用の軸性ベクトル・カレントについても適用することができる。§ 6・8 で，擬スカラー中間子の質量がゼロでない限り，軸性ベクトル・カレントは正確には保存しないことを学んだ。現実の世界は近似的にカイラル対称な世界（$\partial\cdot j^{a\mu}=\partial\cdot j_5{}^{a\mu}=0$）と解釈され，軸性対称性は質量を持たない擬スカラー粒子が現われる Goldstone のモードで実現されている。カイラル対称性が正確に成立する極限では，Ward型の恒等式は容易に導くことができる。例として振幅

$$T_{\mu\nu}{}^{ab}=\int d^4x\ e^{iq\cdot x}\langle p|T(j_{5\mu}{}^a(x)j_{5\nu}{}^b(0))|0\rangle \tag{8.96}$$

を考えよう。これには2つの軸性ベクトル・カレントが含まれ，$|p\rangle$ は運動量 p のハドロン状態（たとえば核子）である。式（8・81）～（8・85）のように q^μ を縮合すると，$\partial^\mu j_{5\mu}{}^a$（$x$）$=0$　を用いて

$$\begin{aligned}q^\mu T_{\mu\nu}{}^{ab}&=i\int d^4x\ e^{iq\cdot x}\partial^\mu\langle p|T(j_{5\mu}{}^a(x)j_{5\nu}{}^b(0))|p\rangle\\&=i\int d^4x\ e^{iq\cdot x}\delta(x_0)\langle p|[j_{50}{}^a(x),j_{5\nu}{}^b(0)]|p\rangle\end{aligned} \tag{8.97}$$

を得る。2つのカレントの同時刻の交換子は，技術的な難点をひきおこす。しかし，もちろんモデルをとれば計算することができる。たとえば $j_{5\mu}{}^a\sim\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi$，$j_\mu{}^a\sim\bar\psi\gamma_\mu\tau^a\psi$ とすれば，

$$\delta(x_0)[j_{50}{}^a(x),j_{5\nu}{}^b(0)]=\delta^4(x)\,i\epsilon_{abc}j_\nu{}^c(0) \tag{8.98}$$

である。しかし，すでに § 4・4 で注意したように，このようなカレント・カレントの交換子はモデルに依存する。特に，いわゆる Schwinger 項（δ 関数の導関数を含む）が式（8・98）の右辺に現われる可能性がある。さらに詳しい研究によれば［Jackiw 1972, Itzykson & Zuber（1980），§ 5・1・7］，もうひとつ特異項が生ずる。これは時間順序の記号 T の正しい共変的な定義にかかわるもので，これがカレントの積に作用するとき生ずる。この特異項は $T_{\mu\nu}$ の中に余分な“かもめ（鷗）項”をつけ加えたように見える。しかしながら，実用的に興味ある場合は，これら2つの微妙な点は互いに打消しあってしまい，素朴な関係式（8・97），（8・98）が実効的に成立するのである。あるいは，すぐ $q\to0$ の極限を考えるのだから，この極限を式（8・97）の段階でとってしまう。それから空間積分（$x_0=0$ とおいて）を遂行し，交換子［$Q_5{}^a(0)$，

$j_{5\nu}{}^b(0)$]を得る。これに対しては上述の難点は起こらず単に $i\epsilon_{abc}j_\nu{}^c(0)$ となる。

式（8・97），（8・98）から

$$q^\mu T_{\mu\nu}{}^{ab} = -\epsilon_{abc}\int d^4x\ e^{iq\cdot x}\langle p|j_\nu{}^c(0)|p\rangle\delta^4(x) \tag{8.99}$$

を得る。しかしベクトル・カレントはアイソスピン・カレントと同定されており，アイソスピン・カレントは行列要素

$$\langle p|j_\nu{}^c(0)|p\rangle = 2p_\nu I_h{}^c \tag{8.100}$$

を持つ。ここに I_h^c はハドロンのアイソスピン演算子の状態 $|p\rangle$ のハドロンにみあう行列表示である。したがって，最終的な結果

$$q^\mu T_{\mu\nu}{}^{ab} = -2\epsilon_{abc}p_\nu I_h{}^c \tag{8.101}$$

に到達する。この例では，交換子の項が式（8・101）の右辺にゼロでない結果を生じた。$q\to 0$ の極限を考え，左辺に質量を持たないパイオンの効果をとりいれると，s 波のパイオン・ハドロン散乱の散乱長についての公式が得られる（友沢1966，Weinberg 1966）。この式を分散関係式と結びつけると，Adler（1965 c)–Weisberger（1965）の関係式となる。これらの予言は実験的に10%の精度でよく成立している。

いろいろな大局的対称性（たとえば大局的カイラル対称性）に関連した QED の Ward 恒等式の一般化を論じた上で，手短かに，局所的非可換対称性に拡張する場合を述べよう。これに対応する恒等式は最初に Slavnov（1972）および Taylor（1971）によって導かれた。QED の場合は，Ward の恒等式の結論 $Z_1=Z_2$ は，くりこみがゲージ不変な結合 $p^\mu-qA^\mu$ の普遍性を傷つけないことを保証している。非可換対称性の場合は，それ自身がくりこみを受けるお化けの場があるから，複雑である。§4・6 で見たように，お化けの場を含み，ゲージの決定されたラグランジアンは，BRS 対称性（4・92）～（4・95）のもとで不変である。Slavnov-Taylor の恒等式は，この対称性を用いて導くことができる。詳しくは Taylor（1978）の第 12 章あるいは Itzykson & Zuber（1980）の§12・4 を参照せよ。これらの恒等式は，ゲージ結合の普遍性がくりこみのあとでも実際に保たれているという証明に用いることができる。さらに，恒等式は理論のユニタリティ（§4・4～§4・6 に論じたような非物理的縦偏極の状態を消去すること）と理論のくりこみ可能性を，共に証明するために本質的に必要である。後者については 2 つ注意すべき点がある。まず第一に，くりこみ可能性は縦偏極状態の高エネルギー領域での振舞いによっておびやか

される（質量を持つベクトル粒子の場合について§5・2で論じた）から，それを押えることはくりこみ可能性にとっても必要である。次に，Wardの恒等式は（QEDと同じく）独立な対立項の数を減らし，もともとのラグランジアンの中でパラメターや場を定義しなおして組込むのにちょうど必要なものだけにする。弱い相互作用のくりこみはTaylor（1978）の第12章に論じてある。

恒等式はまた，物理的振幅がゲージに依存しないことの形式的証明にも用いられる。この証明は単に形式的なものにすぎず，これらの理論のきびしい赤外発散の真の性格については，まだ完全には理解がゆきとどいていない（たとえばDoria *et al.* 1980, Di 'Lieto *et al.* 1981, Andrasi *et al.* 1981などを見よ)。しかし，対称性が“隠れている”場合は，ベクトル粒子が質量を持つので赤外発散の問題は姿を消し，ゲージに依存しないという証明を満足に行うことができる。これはもちろん，Rゲージと Uゲージの同等性を保証するために重要である。

次の節へ話をつなぐ重要な点をひとつ，最後にとりあげる。すでに言及したように，われわれは発散する可能性のある量を何らかの手続きで正規化して取扱ってきた。正規化の手続きが対称性を尊重しないと，（発散のないカレントを通じて）ある種のWard恒等式が導けなくなるという可能性が生じてくる。とすれば，正規化によって対称性が傷つけられることを考慮せずに想定された“素朴な”Wardの恒等式は，実際は正しくないことになる。このことを“特異性”があるという。2種類の重要な特異性があるので，それを次の2つの節で論ずる。第一の特異性“γ_5 特異性”は，対称性がカイラル型であるような軸性カレントを含む振幅のどこかに起こってくる。第二の特異性は，スケール不変性とのかねあいで生じてくる。

8・3　γ_5 特異性

ここで，この技術的な問題（しかも発展途上にある）について完全な議論をするつもりはない。当面の目的は，特異性が存在することを読者に警告し，どのようにして特異性が生ずるのか，なぜある場合には特異性が歓迎され，ある場合には忌避されねばならないか，その理由をたづねてみることである。

γ_5 特異性の古典的な例は，大局的なカイラル対称性にもとづいた（§6・8に論じたような隠れたモードで実現している）$\pi^0 \to \gamma\gamma$ の崩壊率の計算に現われる。この対称性が近似的に成立つとしたときに実験とよくあうという結果は§6・8に述べた。また，このような結果の導き方を§8・2で示した。しかし

ながら，ここに3つの悪名高き正しくない予言がある。その第一は，カイラル対称性の極限では $\pi^0 \to \gamma\gamma$ の振幅がゼロになるということである（Veltman 1967，Sutherland 1967）。この極限では，$j_{5\lambda}{}^a$ のような軸性ベクトルのカレントは保存し，式（4・69）の形の Ward 恒等式を $j_{5\lambda}{}^a$ を含む振幅から一見導くことができるように思われる。しかし，Sutherland と Veltman が指摘したように，残念ながらこのような恒等式は $\pi^0 \to \gamma\gamma$ の振幅をゼロにしてしまう。現在では，特異項を含めなくてはならないことが一般に認められている。この特異項は"素朴な"Ward 恒等式を補正し，観測された崩壊率によくあう大きさを与えるのである。

$\pi^0 \to \gamma\gamma$ の振幅がゼロになる議論を手短かにしておこう。2つの光子と軸性ベクトル・カレントの第3（アイソスピン）成分 $j_{5\lambda}{}^3$ が作る3枝頂点の頂点関数 $\langle 0 | j_{5\lambda}{}^3(x) | \gamma\gamma \rangle$ を考えよう。運動量空間でこれは振幅 $T_{\lambda\mu\nu}\epsilon_1{}^\mu\epsilon_2{}^\nu$ で表わされる。ϵ は光子の偏極ベクトルである。$\partial^\lambda j_{5\lambda}{}^3 = 0$ から，q を入射の $j_{5\lambda}{}^3$ 外線の運動量として

$$q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}\epsilon_1{}^\mu\epsilon_2{}^\nu \stackrel{?}{=} 0 \tag{8.102}$$

が成立つことが期待される。次に，どのような中間状態が $j_{5\lambda}{}^3$ によって $|0\rangle$ と $|\gamma\gamma\rangle$ を結びつけているかを調べよう。その中には図8・11に示すようなパイオンの状態が確かにある*。明らかにこの寄与は振幅 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ を含む。しかし光子が質量殻の上にあって横偏極をしていれば，$q^2 \to 0$ に応じて（カイラル対称性の極限ではパイオンは質量をもたない）式（8・102）の左辺にはパイオンの極だけが残ってくる。したがって，この極限で振幅 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ はゼロである。$O(m_\pi{}^2)$ の桁の補正の見つもり（Adler 1969）を正確なカイラル対称性に対して行ってみると，予言された物理的崩壊率は問題にならないくらい小さい。したがって，この結果は（近似的）カイラル対称性の成立に疑問を抱かせるのである。

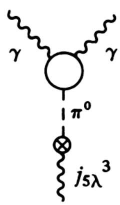


図8・11　$\langle 0 | j_{5\lambda}{}^3 | \gamma\gamma \rangle$ に寄与する1パイオンの極

* π のレプトン崩壊は振幅 $\langle 0 | j_{5\lambda}{}^3 | \pi \rangle$ を含む。

このような状況に対しては，特定のモデルの範囲で詳しい計算を行って考察することがしばしば役に立つ。いまの場合，カイラル対称性を隠れたモードで例示するモデルが欲しいのであるから，ラグランジアン（6・87）を選び，いつものようにゲージ不変な方法で電磁相互作用を含むように拡大すればよいことは自明である*。平行移動（6・86）の結果として，モデルの軸性カレント（6・75）は余計な項 $v\partial^\mu\phi^a$ を得るが，式（6・87）の中のフェルミオン場が質量を持つにもかかわらず，カレントは形式的に保存している。（これはもちろんカイラル対称性が隠れたモードで実現しているからである。）ここで“形式的”という意味は，場を古典的に取扱ってでてくる結果をさす。実際，式（8・102）はこのモデルでは正しくないことがわかる。“特異”項が右辺に現われて，古典的な結果を無効にしてしまうからである。特異項は特に場の量子論的な起源を持っており，必要なくりこみの手続きを注意深く調べて，はじめて現われるものである。

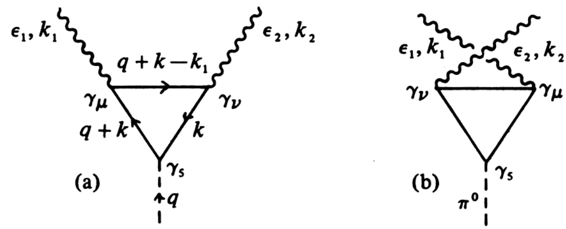


図8・12　§6・8のモデルによる $\pi^0\to\gamma\gamma$ 過程への最低次の寄与（三角図形）。
（a） 直接図形　（b） 交差図形

微細構造常数 α の最低次で調べてみる†。まず振幅 $\pi^0\to\gamma\gamma$ がこのモデルではとにかくゼロにならないかどうか，験証することからはじめよう。α の桁では，図8・12(a)および(b)の2つの図形がある。$\pi^0\to\gamma\gamma$ の振幅は $\epsilon_1{}^\mu\epsilon_2{}^\nu T_{\mu\nu}$ の形を持ち，2つの図形の和は

$$T_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}{}^{(1)}(k_1,k_2)+T_{\nu\mu}{}^{(1)}(k_2,k_1) \tag{8.103}$$

である。ここで

---

* 式（6・87）を簡単化し，電荷 e のフェルミオン（陽子）と2つの中間子，すなわち σ メソンと ϕ^a メソンの $a=3(\pi^0)$ 成分のみを含めば十分である。

† 重要な結果は実は α のすべての次数で成立つことが最終的にわかる。

$$T_{\mu\nu}{}^{(1)}(k_1, k_2) = ge^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \frac{Tr[(\not{q} + \not{k} - \not{k}_1 + m)\gamma_\mu(\not{q} + \not{k} + m)\gamma_5(\not{k} + m)\gamma_\nu]}{[(q+k-k_1)^2 - m^2][(q+k)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \tag{8.104}$$

であるが，このモデルでは§6・8で論じたようにフェルミオンの質量は $m=-gv=gf_\pi$ である。式（8・104）の積分は実際収束する。積分の見積りは Itzykson & Zuber（1980）の§11・5・2に詳しく述べてある。光子が質量殻の上にあり，$q^2 \to 0$ の極限に興味があるのだから，この場合の結果は

$$\epsilon_1{}^\mu \epsilon_2{}^\nu T_{\mu\nu} \xrightarrow[q^2 \to 0]{} \frac{e^2 g}{4\pi^2 m} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_1{}^\mu \epsilon_2{}^\nu k_1{}^\rho k_2{}^\sigma \tag{8.105}$$

である。$g/m = f_\pi{}^{-1}$ を用いて崩壊率を計算することができ，よく実験と一致することが見いだされている。

次に，式（8・102）の状況に光をあてるため，同じモデルで α の程度まで計算した $T_{\lambda\mu\nu}$ を考えよう。軸性カレントの結合は，式（6・87）を式（6・75）に代入すれば見てとれる。フェルミオンと軸性ベクトル・カレントの普通の結合のほかに，軸性ベクトル・カレントとパイオンの間に直接の結合がある。これは平行移動（6・86）から生ずる $j_{5\lambda}{}^a$ の中の余計な項 $v\partial_\lambda\phi^a$ に対応するものである。この結合は因子 $\mathrm{i}vq_\lambda = -\mathrm{i}(m/g)q_\lambda$ を含む。したがって，図8・13(a)，(b)，(c)，(d)に示す4個の図形を考えなくてはならない。全体の寄与を

$$T_{\lambda\mu\nu} = \hat{T}_{\lambda\mu\nu} + \frac{m}{g} q_\lambda \left(\frac{-1}{q^2} \right) T_{\mu\nu} \tag{8.106}$$

と書けば，図8・13(a)，(b)の図形は $\hat{T}_{\lambda\mu\nu}$ に効き，図8・13(c)，(d)の図形は $T_{\mu\nu}$ に効く。[式（8・106）の中の $-1/q^2$ は，質量を持たないパイオンの極である。]
もし式（8・102）が正しければ

$$q^\lambda \hat{T}_{\lambda\mu\nu} \stackrel{?}{=} \frac{m}{g} T_{\mu\nu} \tag{8.107}$$

が成立つはずである。再び，図8・13(a)，(b)の図形の計算の細かいことは Itzykson & Zuber（1980）を参照してほしい。その結果によれば，図8・13(a)の図形の式（8・107）に対する寄与は

$$q^\lambda \hat{T}_{\lambda\mu\nu}{}^{(1)} = \frac{m}{g} T_{\mu\nu}{}^{(1)} + \frac{e^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$
$$\times\left\{\frac{Tr[(\not k+m)\gamma_\mu\gamma_5(\not k-\not k_2+m)\gamma_\nu]}{(k^2-m^2)[(k-k_2)^2-m^2]}\right.$$
$$\left.-\frac{Tr[(\not k+\not k_1+m)\gamma_\nu\gamma_5(\not k+m)\gamma_\mu]}{[(k+k_1)^2-m^2](k^2-m^2)}\right\} \tag{8.108}$$

である。図8・13(b)の図形の寄与は明らかに $\mu\rightleftharpoons\nu$, $k_1\rightleftharpoons k_2$ とおきかえれば前と同じである。したがって，式（8・107）が成立するためには，式（8・108）の中の積分が0にならなくてはならない。

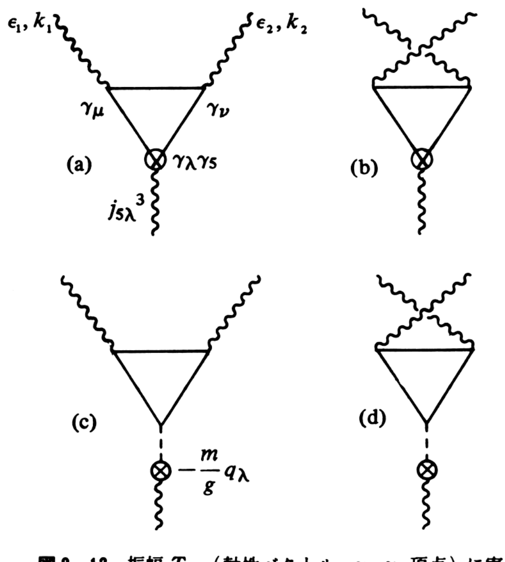


図8・13 振幅 $T_{\lambda\mu\nu}$（軸性ベクトル－γ－γ 頂点）に寄与する最低次の(三角) 図形。(a)，(b)はフェルミオンに対する軸性ベクトルの直接および交差結合。(c)，(d)はパイオンに対する軸性ベクトルの直接および交差結合。

とうとう問題の核心に達した。式（8・108）の中で変数の変換 $k\to k+k_2$ を行って式（8・107）を証明しようとすると，式（8・108）の第一の積分は図8・13(b)からくる同様な表式の第二の積分と打消してしまう。同様に残りの積分も相殺してしまう。しかし，これらの積分はすべて1次発散である。発散が

あるときこのような変数の平行移動は無意味である。平行移動は積分の値を事実上有限量だけ変えるにすぎないからである（Jackiw 1972 を見よ）。積分はこのような平行移動を矛盾なく行うことができるように正規化されていなくてはならない。

ここに至って，どのようなタイプの正規化を行うかが問題になる。電磁的ゲージ不変性が保たれること（これについては後にまた注意する）を仮定し，Pauli-Villars の正規化を用いよう。その結果は，フェルミオンの質量 m に依存するそれぞれの振幅 $A(m)$ から，対応する振幅 $A(M)$ を引けばよい。ここにフェルミオンの大きい質量 M は，最終的に無限大へ向かわせる。式（8・108）の中でこのような引き算を行うと，積分が相殺するという先ほどの議論が成立ち，式（8・107）の“正規化された”形

$$q^{\lambda}[\hat{T}_{\lambda\mu\nu}(m)-\hat{T}_{\lambda\mu\nu}(M)]=\frac{m}{g}T_{\mu\nu}(m)-\frac{M}{g}T_{\mu\nu}(M) \tag{8.109}$$

を得る。さて，ここで $M\to\infty$ としてみよう。左辺でフェルミオンに大きい質量を持つ図形はゼロになるが，右辺では何か注目すべきことがおこる。$T_{\mu\nu}(M)$ の中で $M\to\infty$ の極限をとることは，$q^2\to 0$ の極限をとることと同じであることは想像できるであろう。［式（8・104）の詳しい表式で $m\to M$ として確めることができる。］しかし，この極限はすでに（8・105）に与えられていて，因子 M^{-1} を含んでいる。したがって，$M\to\infty$ のとき $MT_{\mu\nu}(M)$ は有限である。式（8・105），（8・109）を用いて最終的に

$$q^{\lambda}\hat{T}_{\lambda\mu\nu}=\frac{m}{g}T_{\mu\nu}-\frac{\alpha}{\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1{}^{\rho}k_2{}^{\sigma} \tag{8.110}$$

という結果を得る。$k_1{}^{\mu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1{}^{\rho}k_2{}^{\sigma}=k_2{}^{\nu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1{}^{\rho}k_2{}^{\sigma}=0$ であるから，電磁的な Ward の恒等式（カレントの保存に由来する）は式（8・110）によって維持されている。

少なくとも，このモデルと以上の正規化の手続きでは，式（8・107）は正しくないことがわかった。したがって，式（8・102）も正しくなく，式（8・106），（8・110）より

$$q^{\lambda}T_{\lambda\mu\nu}\epsilon_1{}^{\mu}\epsilon_2{}^{\mu}=-\frac{\alpha}{\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_1{}^{\rho}k_2{}^{\sigma}\epsilon_1{}^{\mu}\epsilon_2{}^{\nu} \tag{8.111}$$

となるはずである。“素朴な” Ward 恒等式（8・102）は，式（8・111）の右辺の“特異的な”寄与によって補正されたのである。

ここで，はじめに取扱った $\pi^0\to\gamma\gamma$ の振幅がゼロになるという問題に立帰り，Sutherland-Veltman の議論を再び調べてみることは有用である。さきに質量殻上の光子に対して $q^2\to 0$ となれば，質量を持たないパイオンの極のみが $q^\lambda T_{\lambda\mu\nu}\epsilon_1{}^\mu\epsilon_2^\nu$ に寄与をすると述べた。式(8・106)の分解によれば，これは $q^2\to 0$ に対して $q^\lambda \hat{T}_{\lambda\mu\nu}\epsilon_1{}^\mu\epsilon_2{}^\mu=0$ とならなくてはならないことを示す。実際，これは正しいが，式（8・105)，（8・110）からわかるように，式（8・110）の中に“特異”項があればこそである。矛盾なくことを運ぶためには，式（8・102）は同じ特異項だけ補正されて式（8・111）とならなくてはならない。これから，パイオンの崩壊振幅はゼロでなくなる。

先へ進む前に，$\pi^0\to\gamma\gamma$ の崩壊率として予言される実際の値について注意をしておく。式（8・105）の計算はもちろん§6・8のモデルの枠内で行ったのであるが，実験的なパラメター f_π を g/m のところに入れると，実験との一致が得られる。フェルミオンの質量はそれ自身としては明らかに重要ではない。ずっと以前，Steinberger（1949）は陽子の閉線を用いたが，現在では誰でもクォークの閉線を用いるであろう。しかし，頂点の結合の強さを制約する電荷やアイソ空間の因子は，正しい崩壊率を得るために重要である。$j_{5\mu}{}^a$ へのクォークの寄与は $\Sigma_i\bar{\psi}_i\gamma_\mu\gamma_5(\tau_i{}^a/2)\psi_i$ であって，種類 i のクォークの電荷は e を単位にして Q_i とする。今までの計算は，クォークのモデルでは因子 $\Sigma_i\tau_i{}^3Q_i{}^2$ がかかる。u, d, s クォークのみではこの因子は $1/3$ である。したがって，u, d, s それぞれのクォークについて，電磁的に同等である3組の複製がない限り，実験との一致は失われてしまう。カラー自由度がまさにこの縮退をみたし，したがって $\pi^0\to\gamma\gamma$ の崩壊率はカラー自由度が存在する重要な証拠とみなされる。

式（8・110)，（8・111）は α の桁までしか正しくないと考えられるかもしれない。[O（α^2)の補正はおそらく極めて小さいであろう。] しかし，Adler & Bardeen（1969）は，“三角”閉線は $j_{5\lambda}{}^a$-γ-γ 頂点に特異項の寄与のみを生ずることを示した。したがって，式（8・110)，（8・111）は α のすべての次数で正しいのである。

素朴な恒等式（8・102）が成立しなかった本質的な理由は，採用した正規化の方法が，式（8・102）の基礎になっている（古典的）対称性を尊重していなかったことにある。Pauli–Villars の方法では，カイラル不変性はフェルミオンの質量 M によってあからさまに破られている。これと対照的に，この正規化の方法はすでに注意したように，電磁的 Ward 恒等式を正しく保存してい

る。それはこの方法が電荷の保存を尊重しているからである。このような特異性は，フェルミオンがベクトル・カレントおよび軸性ベクトル・カレント双方に結合するすべての理論で発生する。それはベクトル・カレントおよび軸性ベクトル・カレントの対称性をともに尊重するような正規化の方法（すべての発散図形に対する）を見いだすことができないからである（Adler 1970, Jackiw 1972）。一般的な解析は Adler & Bardeen（1969）が行った。

$\pi^0 \to \gamma\gamma$ の場合のように，もしベクトル・カレントがゲージ場に結合しているのであれば，非物理的な偏極状態を消去し，くりこみ可能性そのものを保証するために，ベクトル型の Ward 恒等式を確保する具体的なほかの方法はないように思われる。したがって，素朴な恒等式（8・102）は実際は電磁的ゲージ不変性と矛盾する，という見地をとることができよう。［電磁的ゲージ不変性を尊重する正規化の方法は，式（8・102）のかわりに式（8・111）を導くからである。］または，形式的な保存則 $\partial^\lambda j_{5\lambda}{}^a = 0$ は，電磁場が存在するときはゲージ不変性と矛盾すると想像することもできる。

これが実際に Schwinger（1951）のとった見地であって，彼がはじめて特異性の存在に気づいたのである。Schwinger の方法では，閉線積分の高エネルギー特異性（運動量空間）の代わりに，$\bar{\psi}(y)\gamma_\lambda\gamma_5(\tau^3/2)\psi(x)$，$x \to y$ のような演算子の短い距離における特異性（座標空間）に注目する。このような演算子はゲージ不変ではない。$\bar{\psi}(y)$ と $\psi(x)$ の局所的位相因子は異なるからである。Schwinger の解析によれば，演算子をゲージ不変にし，$x \to y$ の極限をとると

$$\partial^\lambda j_{5\lambda}{}^3 = -\frac{\alpha}{8\pi}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho} \tag{8.112}$$

の関係が得られる。ここに $F^{\lambda\mu}$ は電磁場のテンソルである。式（8・112）は，式（8・102）を式（8・111）のように修正する。

以上の議論で，軸性カレントは（あからさまに，あるいは暗黙のうちに）大局的対称性と関連していた。ベクトル・カレントのみがゲージ場と結合し，したがって，局所的対称性を持っていた。軸性カレント $j_{5\lambda}{}^3$ を（質量を持たない）ゲージ場に結合しなかったから，式（8・111）のような関係式が存立する余裕があったのである。もし結合したとしたら，ベクトル・ゲージ場の場合とまったく同様，ユニタリティとくりこみ可能性を保証するため，特異性を持たない結果（8・102）を必要としたであろう。しかし弱い相互作用の GSW 理論では，

同じような軸性カレントが実際ゲージ場に結合している。ここでは対称性は非可換であるから，確保しなければならない軸性ベクトルの恒等式は，式（8・102）の非可換（Slavnov-Taylor の）対応式である。電磁的ゲージ不変性を確保する必要もあるから，ゲージ場と結合するカレントを含む特異性は生じないことを，何とか保証しなくてはならない。

GSW モデルでは，三角図形のみが特異性を生ずる。しかしすでに経験したように，特異性の寄与はフェルミオンの質量によらない。したがって，カレントのハドロン部分にある任意の特異性を，カレントのレプトン部分にある対応する特異性によって，相殺してしまう可能性を生ずる。Bouchiat *et al.* (1972) は，もし分数電荷を持つクォークが，3つのカラーで現われるならば，式（7・80）のそれぞれの世代はそれぞれ別個に，特異性を持たないことをはじめて指摘した。特異性を相殺できることは，可能な理論にとって強力な制約になっているように思われる（'t Hooft, 1980）。

最後に，カイラル対称性のもたらすほかの2つの誤った予言について手短かに述べておこう。その解決もまた特異性と関係しているのである。カイラル対称性の極限で，軸性アイソスカラー荷量

$$Q_5{}^0=\int\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi\ \mathrm{d}^3x \tag{8.113}$$

は保存する。この場合 Goldstone ボソンはおそらく η であろう。しかし η の質量は m_π よりもずっと0に近くない。m_u，m_d がゼロでなければ，$m_\eta<\sqrt{3}m_\pi$ である（Weinberg 1975）。実験的には $m_\eta\approx 4m_\pi$ であるから，カイラル対称性は問題を呈するのである。さらにもうひとつの難点は，カイラル対称性の極限では η は 3π に崩壊することが禁止される（Sutherland 1966）。これらのいわゆる“$U(1)$ 問題”の完璧な解決はまだ完全には明らかではないが，軸性アイソスカラー・カレントに関連した特異性が出発点となることも明白である。Kogut & Susskind（1975）および 't Hooft（1976）が解決の可能性を示唆しているが，最新の解説に Peccei（1980）がある。

8・4　スケール不変性

場の量子論におけるスケール（尺度）不変性の研究は，素粒子物理学と統計力学の双方に重要な応用がある。前者の一例としては核子標的による“深”非弾性レプトン散乱があり，後者の一例は臨界現象と相変化である。レプトンの

非弾性散乱では，実験室系でエネルギー E を持つレプトンが核子と衝突して散乱され，エネルギー E' をもって射出されてエネルギー $E-E'$ を核子に移行させる。不変２乗量 q^2 で表わされる運動量の移行もある（図８・14参照）が，外へ出てゆくレプトンだけを観測する。M を核子の質量として　$\nu=M(E-E')$ を導入する（ν は Lorentz 不変な形にも書ける)。この過程の微分断面積は（既知の運動学的因子のほかに）構造関数*$F(\nu, q^2)$を含む。構造関数は本質的に図８・14の下の頂点の振幅の絶対値の２乗を求め観測しないハドロンの終状態について足し上げたものである。F は次元を持たない量として定義されている。スケール不変性の基本的な動機は次のとおりである。F は無次元だから，おそらく†，無次元の比 ν/q^2，M_i^2/ν，M_i^2/q^2 だけに依存するであろう。ここに M_i は，考えている過程にふさわしい任意の質量パラメター（たとえばレプトン，核子，あるいはクォークの質量）である。さて，注目すべき事実は（少なくともよい近似で，後述)，ν と q^2 が数 GeV^2 より大きくなると，異なる ν と q^2 に対する F の値は普遍的な曲線の上におち，曲線は ν/q^2 だけの関数になることである。これは質量パラメターの依存性を無視できるような運動学的領域に突入していることを示しているように思われる。したがって，質量を持たない理論を用いて状況をモデル化するのが有効であろう，という着想に至る。スケール不変性という場の理論の概念が適切になるのは，まさにこの点である。

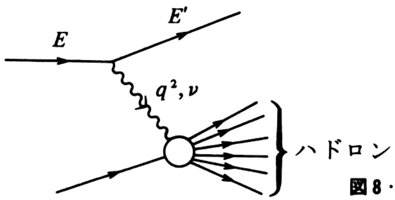


図８・14　電子・核子非弾性散乱の１光子交換振幅

統計力学では，質量パラメターの役割は相関距離の逆数 ξ^{-1} が果たす。ξ は温度に依存し，ある温度 $T=T_C$ で生起する臨界点では，ξ はある指数冪(べき)に従って無限大に向う　$\xi\sim(T-T_C)^{-P}$。同じことであるが，“質量” ξ^{-1} がゼロに向うので，再び質量を持たない理論が適切になる領域におそらく入っているこ

* 厳密に言えば，偏りを考えない場合には２つの構造関数がある。これから論ずることは，そのどちらにでもあてはまる。したがって，総括的にひとつの構造関数をとりあげて問題を簡単化することにする。

† これだけからは決して自明ではないことが判明するであろう。

とになる。

簡単のために，スカラー場の単純な理論を考察する。質量項の役割に興味があるのだから，まず質量を持つ理論から出発し，ラグランジアンを

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}}=\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{g}{4!}\phi^4-\tfrac{1}{2}m^2\phi^2=\mathcal{L}_{\mathrm{S}}+\mathcal{L}_{\mathrm{B}} \tag{8.114}$$

ととる。ここに，$\mathscr{L}_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ である。ここで考える変換は，座標の大局的スケール変換で，これを

$$x\to x'=\mathrm{e}^{-\alpha}x \tag{8.115}$$

の形に書く。もちろん，このような変換は長さの尺度（４次元な意味で）の定義し直しにすぎない。しかしながら，これと式（8・114）の中のすべての量（特に質量 m を含む）を次元的にスケールし直すという普通の操作との違いをはじめから区別することは，極めて重要である。この操作はさきの例で F の次元解析に暗黙のうちに用いた種類のスケーリングである。先へ進む前に，このような普通の次元のスケールのやりなおしによって，式（8・114）の中の量がどう振舞うか考えるのは実際に有用である。

慣行の $c=\hbar=1$ の単位系で論ずる。この単位系ではただひとつ独立な次元が残り，それが質量 M である。作用は無次元である。その意味は，そこに現われるすべての次元を持つ量に適当な同時再スケール化を行っても不変であることである。これから場の量 ϕ の次元を求めることができる。これは以下の議論でことさら重要になる。次元を四角い括弧で表わすと，$[I]=0$ だから $[\mathscr{L}]=M^4$，したがって，$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ 項から $[\phi]=M$ である。これを質量の単位で ϕ は次元１を持つという（同様に $[g]=0$，もちろん $[m]=M$）。質量は長さの逆数の次元を持つから，普通の次元のスケールのやりなおしでは，x が式（8・115）で変化するとき ϕ と m には因子 e^{α} がかかる。同様な分析を行うとフェルミオンの場は質量次元 3／2 を持つことがわかる。

しかし，ここで考えていることは，これとは少し異なる。式（8・114）の中の質量 m はスケールされないのである。m を含む項 $\mathscr{L}_{\mathrm{B}}$ は座標のスケール変換（8・115）の不変性を破る。だから添字Ｂをつけておいたのである。この事実を形式的に見るために，座標が式（8・115）で変わるときに ϕ がどのように変換するか知る必要がある。ϕ はスカラー場であるから，変換（8・115）のもとで ϕ が ϕ' に変換するとき

$$\phi'(x')=\mathrm{e}^{\alpha d_\phi}\phi(x) \tag{8.116}$$

が成立つと考えるのは極めて自然であろう。すなわち，新しい時空間の点で勘定した新しい場の量の値は，もとの時空間の点で勘定したもとの場の量の値に簡単なスケール因子をかけたものである。式（8・116）は，スケール因子がなければ場が回転のもとでスカラーであるという普通の主張となり，それを一般化したものである。スケール因子は式（8・115）の因子と似ているように選んだ。パラメター d_ϕ は，まったく同じではないが，ϕ の質量単位で測った普通の次元と密接に対応する。

式（8・116）を

$$\phi'(x) = e^{\alpha d_\phi}\phi(e^\alpha x) \tag{8.117}$$

と書換えると，無限小スケール変換の振舞いは

$$\left.\begin{aligned} &x \to (1+\epsilon)x \equiv x + \delta x \\ &\phi \to \phi + \epsilon(d_\phi + x\cdot\partial)\phi \equiv \phi + \delta\phi. \end{aligned}\right\} \tag{8.118}$$

で与えられる。この式から容易に

$$\left.\begin{aligned} &\delta(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) = \epsilon(2 + 2d_\phi + x\cdot\partial)(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) \\ &\delta(\phi^4) = \epsilon(4d_\phi + x\cdot\partial)\phi^4 \\ &\delta(\phi^2) = \epsilon(2d_\phi + x\cdot\partial)\phi^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.119}$$

が導かれる。作用の中の対応する変化を計算するとき，部分積分を行い $x\cdot\partial$ 項を -4 に転換する。したがって

$$\delta I_S \equiv \int \delta\mathcal{L}_S\, d^4x = \epsilon \int \left[\tfrac{1}{2}(2d_\phi - 2)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{g}{4!}(4d_\phi - 4)\phi^4\right] d^4x \tag{8.120}$$

および

$$\delta I_B \equiv \int \delta\mathcal{L}_B\, d^4x = \epsilon \int -\tfrac{1}{2}m^2(2d_\phi - 4)\phi^2\, d^4x \tag{8.121}$$

を得る。

式（8・120），（8・121）より，$d_\phi=1$ であれば I_S の部分は変換（8・118）のもとで不変であるが I_B の部分は不変でない。これらの事実は容易に理解できる。$d_\phi=1$ であれば，式（8・117）より ϕ は正確に因子 e^α でスケールされ，これは ϕ の普通の次元解析で得る因子と同じである。すなわち d_ϕ が 1 という値は通常の次元解析の意味での ϕ の次元である。I のスケール不変性の議論は前と同じように行われるが，質量 m に依存する $\mathscr{L}$ の部分はスケールしないから別である。したがって，スケール不変性と質量を持たないこととの関連が明

らかに現われたようである。

変換（8・115）のもとでϕの振舞を制約する量d_ϕを場ϕの"スケール次元"といい，普通の次元と区別する。d_ϕが実際1に等しいのならば，何でこのような面到なことをするのかと読者はいぶかるかもしれない。その答はすぐあとからわかることだが，自由場の場合にかぎり$d_\phi=1$なのである［式（8・114）で$g=0$の場合］。場が相互作用している場合，d_ϕはϕの"特異次元"と呼ばれる量だけ1とは異なっているのである。Coleman（1973）は，いろいろな場の理論における特異次元の実例を論じている。

この事実は，以上の議論を急速に終わらせるようでもある。たとえば，$d_\phi \neq 1$であれば，質量に依存しない部分$\mathscr{L}_s$もスケール不変な作用I_sを与えない。したがって，質量をもたない理論に対してさえ，スケール不変性というようなものは初めから存在しないことになる！　しかしながら，注目すべきことには，次元の議論を進める値打があるのである。

このいささか技術的な問題を，やさしい的にしぼって追求することにする。まず再び"素朴"な方法とでも言うべきものから始める。変換（8・115）のもとで$\delta I=0$という意味で，スケール不変性は，ラグランジアンがあからさまに質量を含まないとき（あるいは質量が無視できるような運動学的領域を考えるとき），成立する見込みがあると期待してよい。そこで，次のラグランジアン

$$\mathcal{L}_S = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{g}{4!}\phi^4 \tag{8.122}$$

を考える。すでに見たように，ϕが$d_\phi=1$として（すなわち"素朴"な形で）式（8・117）のように変換するとき，$\mathscr{L}_s$は不変なI_Sを与える。この対称性に対応して，発散を持たないNoetherカレントが存在する（その具体的な形はここに与えない。Coleman 1973を見よ）。この条件から出てくる"Wardの恒等式"がどのようなものか調べてみよう。2点関数

$$G^{(2)}(x) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle \tag{8.123}$$

を考える。$d_\phi=1$であれば$G^{(2)}(x)$はx^{-2}のように振舞い，運動量空間では$G^{(2)}(p)\sim p^{-2}$　である。これはまさに，質量を持たない理論（質量をもつ理論でも$p^2 \gg m^2$ならばよい）の自由な伝播関数である。一般に，n点Green関数$G^{(n)}$は（$n-1$）個の独立な運動量を持つから，スケール次元は　$n-4(n-1)$になると期待される。したがって，$G^{(n)}$は

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} G^{(n)} \overset{?}{=} [n - 4(n-1)]\, G^{(n)} \tag{8.124}$$

をみたすであろう。これは“素朴な”Ward 恒等式の典型である。これは $d_\phi = 1$ として $\mathscr{L}_s$ のスケール不変性から形式的に導くことができる。実はこの関係式は誤りである。この形の正しい関係式（後述）が存在し，それは適当な状況のもとで，Green 関数 G や構造関数 F の x あるいは p の依存性を決定する。次元解析にもとづく素朴な期待は修正されなくてはならないが，摂動論で計算できるように修正されることが判明する。ここにスケール不変性およびこれに関連した Ward 恒等式の研究の意義がある。

式（8・124）が正しくない理由は，再び，必要な正規化がスケール不変性と矛盾する（あるいは尊重していない）からである。これは明らかに切断質量についてはそうであるが，次元正規化についても同じくそうなのである。次元正規化の手続きでは，相互作用の項もスケール不変になるように場のスケール次元を（運動エネルギーの項を通じて）決めることは不可能である。したがって，自由場の理論のみがスケール不変になりうる。式（8・124）は $g=0$，$d_\phi=1$ のときにだけ正しい。正規化を切断 Λ を用いて論じよう。

Λ は最後には無限大ととるのであるから，Λ は結局“スケールを決め”はしないし，式（8・124）で表わされる素朴なスケール不変性を破りはしない，と考えられるかもしれない。しかし，実はそうではない。すでに見たように，くりこんだ有限な振幅は，式（8・23），（8・24）で与えられるような形のあるくりこみ条件によって定義されるものである。これらは，運動量のある特定の値における Green 関数の条件（対立項を決定するに十分な数の）である。質量を持たない理論では，赤外発散のためゼロ運動量の点を選ぶことはできない。したがって，質量を持たない理論の場合ですら，質量スケール μ がくりこみ条件を介して再び入ってくるのである。

これは Green 関数の x あるいは p 依存性をスケール不変性の議論から計算する望みがないということであろうか。確かに，式（8・124）に基づいた簡単なスケール化ではできない。しかし，より微妙なかつ興味ある状況が生まれてくる。前節で考察した軸性特異性の場合とまったく同様に，切断（あるいはくりこみ点 μ ）を注意深く考察すると，素朴な結果（8・124）に加わる“特異的”な寄与がある。のちにわかることだが，これらの項の起源は，μ が任意でよいという一見極めて無邪気な事実にある。たとえ μ がゼロでない何らかの

値をとらなくてはならないにせよ，それがどんな値であるのかは問題ではない。くりこんだ振幅を定義するために選ぶ点の問題にすぎないからである。最終的には，理論は μ に依存してはならない。次の問題は理論が μ によらないことを定式化することである。

この点で，少しく形式的ではあるが，質量を持たない理論（8・122）に対して何がくりこみ条件になるかを述べる。プロパー（1粒子既約）な Green 関数 $\Gamma^{(n)}$ を導入する。これは1粒子既約 Green 関数 $G_{(1)}^{(n)}$ でそれぞれの外脚に因子 $(G_{(1)}^{(2)})^{-1}$ を含むものである。 $G_{(1)}^{(2)}$ は1粒子の伝播関数に比例し，$\Gamma^{(2)}=(G_{(1)}^{(2)})^{-1}$ である。

くりこみ条件の然るべき組合わせは，

$$\Gamma^{(2)}|_{p^2=-\mu^2}=-\mu^2;\quad \left.\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=-\mu^2}=1;\quad \Gamma^{(4)}|_s=-g \tag{8.125}$$

である。ここに“対称”点 s はすべての運動量を入射の向きにとって

$$p_1{}^2=p_2{}^2=p_3{}^2=p_4{}^2=-3\mu^2/4,\ (p_1+p_2)^2=(p_1+p_3)^2=(p_1+p_4)^2=-\mu^2$$

である。しきい値の特異性を避けるため，ユークリッド領域の点を選んだ。条件（8・125）は質量・波動関数・頂点関数のくりこみを与える。

くりこんだ量 $\Gamma^{(n)}$ は運動量 p_i，g，およびおそらく μ による。式（8・124）の意味での $\Gamma^{(n)}$ の簡単なスケール次元は容易に（$4-n$）であることがわかるから，式（8・124）は

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}\Gamma^{(n)}\overset{?}{=}(4-n)\Gamma^{(n)} \tag{8.126}$$

となる。しかし，$\Gamma^{(n)}$ のスケールを決めるのは，今や μ だから

$$\Gamma^{(n)}(p_i,g,\mu)=\mu^{4-n}f(p_i/\mu,g) \tag{8.127}$$

と書くことができる。したがって，式（8・126）は

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)}\overset{?}{=}0 \tag{8.128}$$

となる。

さて，式（8・128）の形の正しい式は何であろうか。まず最初に，くりこみの手続きを強調するような形式的なやり方で求めてみよう。式（8・128）の中の $\Gamma^{(n)}$ は，くりこんだ関数であって，それをくりこんでいない $\Gamma_{\rm un}{}^{(n)}$ を用いて

$$\Gamma^{(n)}(p_i,g,\mu)=Z^{n/2}\Gamma_{\rm un}{}^{(n)}(p_i,g_{\rm un},\Lambda) \tag{8.129}$$

と表わすことができる。ここで，Zはϕの波動関数のくりこみ定数である。

まさしく，

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma_{\mathrm{un}}{}^{(n)}=0 \tag{8.130}$$

であるから，

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-n/2}\Gamma^{(n)})=0 \tag{8.131}$$

である。式（8・131）の中で微分を行うとき，Zもgもくりこみ点μによることに注意しなくてはならない。[gについては式（8・125）から明らかにそうである。]したがって，式（8・131）は

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\mu\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu}\frac{\partial}{\partial g}-\frac{n}{2}\frac{\mu}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\mu}\right)\Gamma^{(n)}=0 \tag{8.132}$$

あるいは

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}-\frac{n}{2}\gamma(g)\right)\Gamma^{(n)}=0 \tag{8.133}$$

となる。ここに

$$\beta(g)=\mu\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu} \tag{8.134}$$

および

$$\gamma(g)=\mu\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\mu} \tag{8.135}$$

である。γでは微分はg_{un}とΛを固定しておいてから行わなくてはならない。式（8・133）は式（8・128）あるいは式（8・124）を補正する式で，“くりこみ群”の方程式と呼ばれている。

式（8・133）は極めて簡単に解釈することができる。くりこんだ物理的振幅はμによらないはずである。もしμが変われば，$\Gamma^{(n)}$ は式（8・127）によって変わるが，gも変わり，場のスケールも変わるので，μの無限小の変化に対して

$$\Gamma\left(\mu+\delta\mu,g+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\mu}\delta\mu,\left(1+\frac{\gamma}{2}\frac{\delta\mu}{\mu}\right)\phi\right)=\Gamma(\mu,g,\phi) \tag{8.136}$$

を得る。式（8・136）はTaylor展開によって式（8・133）に等しい。

方程式（8・133）は，[たとえば式（8・122）のような実際に］スケール不

変な理論の$\Gamma^{(n)}$がみたす条件である。β, γは摂動論で計算することができる。β, γが知られていれば式（8・133）は$\Gamma^{(n)}$のμ依存性を与え，したがって，式（8・127）からp依存性がわかる。もしβもγもゼロであれば，式（8・128）が再出し，したがって式（8・127）から，$\Gamma^{(n)}\sim(p_i^2)^{(4-n)/2}$ である。これは普通の次元解析が与える振舞である。これを（素朴な）“スケーリング”の振舞いという。$\Gamma^{(n)}$は運動量のある冪とともにスケールするからである。次に式（8・133）の中でβだけが0であったとしよう。すると，$\Gamma^{(n)}\sim\mu^{n\gamma/2}$であるから，$\Gamma^{(n)}\sim(p_i^2)^{(4-n-n\gamma/2)/2}$ である。単一粒子の伝播関数についてはこの状況は，$(p^2)^{-(1+\gamma/2)}$という振舞いを生ずるであろう。これは簡単な次元解析から予想されるべきp^{-2}とは異なるスケーリングの振舞いである。これを$(p^2)^{-2+d_\phi}$と書けば，素朴なスケール次元$d_\phi=1$は，$d_\phi=1+\gamma/2$ に変わっている。$\gamma/2$をϕの“特異次元”と呼ぶゆえんである。したがって，βが0であれば，スケーリングの振舞いは前と同じになるが特異次元が表われる。

式（8・133）の解はColeman（1973）が与えた。重要な量はβ（g）であって，これはgのμ依存性を決める非線型微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\ln\mu}=\beta(g) \tag{8.137}$$

の中に入ってくる。Wilson（1971）はこのような方程式に簡単な力学的解釈を与え，$\mu\to\infty$に従ってgはβ（g）の零点g^*に近づき，かつ$d\beta/dg|_{g^*}<0$であることを示した。式（8・133）によれば，このことは大きい（ユークリッド的）運動量に対して$\Gamma^{(n)}$が特異次元$\gamma(g^*)$でスケールすることを意味する。赤外極限ではgは$\beta'>0$であるようなβの零点に近づく。このようにβの零点は振幅の赤外と紫外の振舞いを規定する。

統計力学では，特に臨界現象への応用にあたって赤外極限に興味がある。これが長い距離，長い相関距離の範囲だからである。モデルのハミルトニアンは，$\beta(g^*)=0$, $\beta'(g^*)>0$ を与えるであろう。特異次元$\gamma(g^*)$は“臨界指数”のひとつにあたり，いろいろな場合に計算されている［Amit（1978）を見よ］。素粒子物理では，構造関数で観測されたスケーリング（あるいは近似的なスケーリング）の振舞いは，素朴な次元解析の結果が（少なくともおおかた）正しいことを示している。これは理論が紫外領域で$g\to0$になることを要請しているとも考えられる。このことは逆に，$\beta'(g=0)<0$ であることを意味する。非可換ゲージ理論がこの性質を持つことは，まことに注目に値する［Gross &

Wilczek（1973 a），Politzer 1973]。これを“漸近的自由性”（深ユークリッド領域で$g\to 0$）という。さらにつけ加えれば（Coleman & Gross 1973），くりこみ可能な理論は非可換ゲージ場を含まぬ限り，漸近的に自由になれない。したがって，クォーク間の力については非可換理論（QCD）でなくてはならないと思われる。

漸近的に自由な理論の大運動量領域での振舞いは，ほかに$\beta'<0$になるようなβの零点があってgがそれにも近迫できるのではない限り，摂動論によって計算できる。βを一般的に計算する非摂動論的な方法はまだみつかっていない。したがって，$g\approx 0$ の近傍だけしか解析できないのである。詳細な計算によれば，漸近的に自由な理論では正確なスケーリングから対数的なずれが現われる。(Gross & Wilczek 1973 b，1974，Georgi & Politzer 1974)。これに関連した結果をあげると，μ（あるいは運動量）の大きい極限では，結合定数は対数的にのみ0に近迫する，ということである。[運動量に依存する結合定数という概念は，すでに式（8・49）の真空の偏極の計算のとき出会っている。] 正確なスケーリングは，パートンのモデル（点状の相互作用をしないクォーク，Close 1979 を見よ）で記述される。QCD の予言するパートン・モデルからの対数的なずれは，レプトンの深非弾性散乱で実験的に観測されている（Perkins 1982)。これは QCD を支持する強い証拠になっている。

漸近的に自由な理論では，実効的な結合定数は明らかに赤外の極限ではゼロに近迫しない。QCD の赤外領域での振舞いは，理論の主要問題である。実際，QCD の長い距離での局面（閉じこめは起こるか？）はいまだ未解決である。

文 献

Abers, E. S. & Lee, B. W. (1973). *Phys. Rep.*, 9C, no. 1.
Adler, S. L. (1965*a*). *Phys. Rev.*, **137**, B1002.
Adler, S. L. (1965*b*). *Phys. Rev.*, **139**, B1638.
Adler, S. L. (1965*c*). *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1051.
Adler, S. L. (1969). *Phys. Rev.*, **177**, 2426.
Adler, S. L. (1970). In *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, vol. 1, eds. S. Deser et al. Proceedings of the Brandeis Summer Institute (1970). Mass.: Institute of Technology.
Adler, S. L. & Dashen, R. F. (1968). *Current Algebras and Applications to Particle Physics.* New York: Benjamin.
Aitchison, I. J. R. & Hey, A. J. G. (1982). *Gauge Theories in Particle Physics.* Bristol: Adam Hilger.
Amit, D. J. (1978). *Field Theory, the Renormalisation Group and Critical Phenomena.* New York: McGraw-Hill.
Anderson, P. W. (1963). *Phys. Rev.*, **130**, 439.
Andraši, A., Day, M., Doria, R., Frenkel, J. & Taylor, J. C. (1981). *Nucl. Phys.*, **B182**, 104.
Arnison, G. et al. (1983*a*). *Phys. Lett.*, **122B**, 103.
Arnison, G. et al. (1983*b*). *Phys. Lett.*, **126B**, 398.
Aubert, J. J. et al. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1404.
Augustin, J.-E. et al. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 1406.
Bagnaia, P. et al. (1983). *Phys. Lett.*, **129B**, 130.
Bailin, D. (1977). *Weak Interactions.* London: Chatto and Windus, for Sussex University Press.
Banner, M. et al. (1983). *Phys. Lett.*, **122B**, 476.
Barish, B. C. et al. (1975). *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 538.
Barish, B. C. et al. (1976). *Phys. Rev. Lett.*, **36**, 939.
Barish, S.-J. et al. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 448.
Becchi, C., Rouet, A. & Stora, R. (1974). *Phys. Lett*, **52B**, 344.
Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Schwartz, A. S. & Tyupkin, Y. S. (1975). *Phys. Lett.*, **59B**, 85.
Benvenuti, A. et al. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 800.
Benvenuti, A. et al. (1975*a*). *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 419.
Benvenuti, A. et al. (1975*b*). *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1199.
Benvenuti, A. et al. (1975*c*). *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 1203.
Bjorken, J. D. & Drell, S. D. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*, New York: McGraw-Hill.
Bjorken, J. D. & Drell, S. D. (1965). *Relativistic Quantum Fields*, New York: McGraw-Hill.
Bludman, S. A. (1958). *Nuovo Cimento*, **9**, 443.

Bogoliubov, N. N. (1947). *J. Phys.* (U.S.S.R.), **11**, 23.
Bogoliubov, N. N. & Shirkov, D. V. (1980). *Introduction to the Theory of Quantised Fields* (3rd edn). New York: Wiley-Interscience.
Bouchiat, C. C., Iliopoulos, J. & Meyer, Ph. (1972). *Phys. Lett.,* **38B**, 519.
Bouchiat, C. C. & Bouchiat, M. A. (1974). *Phys. Lett.,* **48B**, 111.
Boulware, D. G. & Gilbert, W. (1962). *Phys. Rev.,* **126**, 1563.
Brandt, R. (1976). *Nucl. Phys.,* **B116**, 414.
Budny, R. (1973). *Phys. Lett.,* **45B**, 340.
Buras, A. J., Ellis, J., Gaillard, M. K. & Nanopoulos, D. V. (1978). *Nucl. Phys.,* **B135**, 66.
Cahn, R. N. & Gilman, F. J. (1978). *Phys. Rev.,* **D17**, 1313.
Callan, C. G. & Treiman, S. B. (1966). *Phys. Rev. Lett.,* **16**, 153.
Chanowitz, M. S. et al. (1977). *Nucl. Phys.,* **B128**, 50.
Close, F. E. (1979). *An Introduction to Quarks and Partons.* London, New York: Academic Press.
Coleman, S. (1966). *J. Math. Phys.,* **7**, 787.
Coleman, S. (1973). In *Properties of the Fundamental Interactions,* pp. 358–99, ed. A. Zichichi. The International School of Subnuclear Physics (1971). Bologna: Editrice Compositori.
Coleman, S. & Gross, D. J. (1973). *Phys. Rev. Lett.,* **31**, 851.
Coleman, S. & Weinberg, E. (1973). *Phys. Rev.* **D7**, 1888.
Cummins, E. D. & Bucksbaum, P. H. (1980). *Ann. Rev. Nucl. and Part. Sci.,* **30**, 1.
Cutkosky, R. E. (1960). *J. Math. Phys.,* **1**, 429.
de Alfaro, V., Fubini, S., Furlan, G. & Rosetti, C. (1973). *Currents in Hadron Physics.* Amsterdam: North-Holland.
Di'Lieto, C., Gendron, S., Halliday, I. G. & Sachrajda, C. T. (1981). *Nucl. Phys.,* **B183**, 223.
Dokshitzer, Yu. L., Dyakonov, D. I. & Troyan, S. I. (1980). *Phys. Rep.,* **58**, 269.
Doria, R., Frenkel, J. & Taylor, J. C. (1980). *Nucl. Phys.,* **B168**, 93.
Ellis, J. (1977). In *Weak and Electromagnetic Interactions at High Energy,* eds. R. Balian & C. H. Llewellyn Smith. North-Holland.
Ellis, J. & Sachrajda, C. (1980). CERN TH 2782.
Englert, F. & Brout, R. (1964). *Phys. Rev. Lett.,* **13**, 321.
Fabri, E. & Picasso, L. E. (1966). *Phys. Rev. Lett.,* **16**, 408.
Faddeev, L. D. & Popov, V. N. (1967). *Phys. Lett.,* **25B**, 29.
Feldman, G. J. et al. (1977). *Phys. Rev. Lett.,* **38**, 1313.
Fermi, E. (1934*a*). *Nuovo Cimento,* **11**, 1.
Fermi, E. (1934*b*). *Z. Phys.,* **88**, 161.
Fetter, A. L. & Walecka, J. D. (1971). *Quantum Theory of Many-Particle Systems.* New York: McGraw-Hill.
Feynman, R. P. (1963). *Acta Physica Polonica,* **26**, 697.
Feynman, R. P. & Gell-Mann, M. (1958). *Phys. Rev.,* **109**, 193.
Fock, V. (1927). *Z. Phys.,* **39**, 226.
Fortson, E. N. & Wilets, L. (1980). *Adv. in At. and Mol. Phys.,* **16**, 319.
Gastmans, R. (1975). In *Weak and Electromagnetic Interaction at High Energies,* eds. M. Levy, J.-L. Basdevant, D. Speiser & R. Gastmans. The Cargèse School (1975). New York, London: Plenum.

Gell-Mann, M. (1961). *Phys. Rev.*, **125**, 1067.
Gell-Mann, M. & Levy, M. (1960). *Nuovo Cimento*, **16**, 705.
Georgi, H. & Glashow, S. L. (1972). *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 1494.
Georgi, H. & Glashow, S. L. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 438.
Georgi, H. & Politzer, H. D. (1974). *Phys. Rev.*, D**9**, 416.
Georgi, H., Quinn, H. R. & Weinberg, S. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 451.
Glashow, S. L. (1961). *Nucl. Phys.*, **22**, 579.
Glashow, S. L. & Gell-Mann, M. (1961). *Ann. Phys.*, **15**, 437.
Glashow, S. L., Iliopoulos, J. & Maiani, L. (1970). *Phys. Rev.*, D**2**, 1285.
Goldberger, M. & Treiman, S. B. (1958). *Phys. Rev.*, **110**, 1178.
Goldhaber, G. et al. (1976). *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 255.
Goldman, T. & Ross, D. A. (1979). *Phys. Lett.*, **84B**, 208.
Goldman, T. & Ross, D. A. (1980). *Nucl. Phys.*, B**171**, 273.
Goldstone, J. (1961). *Nuovo Cimento*, **19**, 154.
Goldstone, J. Salam, A. & Weinberg, S. (1962). *Phys. Rev.*, **127**, 965.
Gross, D. J. (1974). *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 1071.
Gross, D. J. & Wilczek, F. (1973*a*). *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1343.
Gross, D. J. & Wilczek, F. (1973*b*). *Phys. Rev.*, D**8**, 3633.
Gross, D. J. & Wilczek, F. (1974). *Phys. Rev.*, D**9**, 980.
Guralnik, G. S., Hagen, C. R. & Kibble, T. W. B. (1964). *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 585.
Guralnik, G. S., Hagen, C. R. & Kibble, T. W. B. (1968). In *Advances in Particle Physics*, vol. 2, pp. 567ff, eds. R. Cool & R. E. Marshak. New York, London: Interscience.
Hasert, F. J. et al. (1973). *Phys. Lett.*, B**46**, 138.
Higgs, P. W. (1964*a*). *Phys. Lett.*, **12**, 132.
Higgs, P. W. (1964*b*). *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 508.
Isgur, N. & Karl, G. (1979). *Phys. Rev.*, D**19**, 2653.
Itzykson, C. & Zuber, J.-B. (1980). *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill.
Jackiw, R. (1972). In *Lectures in Current Algebra and its Applications*, pp. 97–254, eds. S. B. Treiman, R. Jackiw & D. J. Gross. Princeton University Press.
Kamefuchi, S. (1960). *Nucl. Phys.*, **18**, 691.
Kibble, T. W. B. (1966). *Proc. Oxford Conf. on Elementary Particles 1965*, pp. 19ff. RHEL.
Kibble, T. W. B. (1967). *Phys. Rev.*, **155**, 1554.
Kim, J. E. et al. (1981). *Rev. Mod. Phys.*, **53**, 211.
Kinoshita, T. (1979). In *Proc. 19th Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo, 1978*, eds. S. Homma, M. Kawaguchi & H. Miyagawa. Tokyo: The Physical Society of Japan.
Kogut, J. & Susskind, L. (1975). *Phys. Rev.* D**11**, 3594.
Kugo, T. & Ojima, I. (1979). *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **66**, 1.
Landau, L. D. (1937*a*). *J.E.T.P.*, 7, 19.
Landau, L. D. (1937*b*). *Phys. Z. Sowjet.*, **11**, 26, 545.
Lautrup, B. (1967). *Kon. Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Med.*, **35** (11), 1.
Lee, W. et al. (1977). *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 202.
Lévy, M. (1979). In *Hadron Structure and Lepton-Hadron Interactions*, pp. 465–502, eds. M. Levy, J.-L. Basdevant, D. Speiser, J. Weyers, R. Gastmans

& J. Zinn-Justin. The Cargèse School (1977). New York, London: Plenum.
Llewellyn Smith, C. H. (1974). In *Phenomenology of Particles at High Energies*, eds. R. L. Crawford & R. Jennings. Scottish Universities Summer School (1973). London, New York: Academic Press.
Llewellyn Smith, C. H. (1980). In *Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics and Unified Theories*, eds. K. T. Mahanthappa & J. Panda. The Boulder Summer Institute (1979). New York: Plenum.
Llewellyn Smith, C. H. (1982*a*). *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A**304**, 5.
Llewellyn Smith, C. H. (1982*b*). In *Rencontre de Moriond, 1981*.
Llewellyn Smith, C. H., Ross, G. G. & Wheater, J. F. (1981). *Nucl. Phys.*, B**177**, 263.
Llewellyn Smith, C. H. & Wheater, J. F. (1981). *Phys. Lett.*, **105B**, 486.
London, F. (1927). *Z. Phys.*, **42**, 375.
Maiani, L. (1976). *Proc. 1976 CERN School of Physics*, pp. 23–56. Geneva: CERN 76–20.
Mandl, F. (1959). *Introduction to Quantum Field Theory*. New York: Wiley–Interscience.
Marciano, W. J. & Sirlin, A. (1981). *Nucl. Phys.*, B**159**, 442.
Marshak, R. E., Riazuddin, & Ryan, C. R. (1969). *Theory of Weak Interactions*. New York: Wiley–Interscience.
Maskawa, K. & Kobayashi, M. (1973). *Prog. Theor. Phys.*, **49**, 652.
Matthews, P. T. (1949). *Phys. Rev.*, **76**, 1254.
Mohapatra, R. N. (1978). *Proc. 19th Int. Conf. on High Energy Physics, Tokyo, 1978*, p. 604, eds. S. Homma, M. Kawaguchi & H. Miyazawa. Tokyo: The Physical Society of Japan.
Nakanashi, N. (1966). *Prog. Theor. Phys.*, **35**, 111.
Nakanashi, N. (1973). *Prog. Theor. Phys.*, **49**, 640.
Nakanashi, N. (1974). *Prog. Theor. Phys.*, **52**, 1929.
Nambu, Y. (1960). *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380.
Nambu, Y. & Lurie, D. (1962). *Phys. Rev.*, **125**, 1429.
Nanopoulos, D. V. & Ross, D. A. (1979). *Nucl. Phys.*, B**157**, 273.
Oppenheimer, J. R. (1930). *Phys. Rev.*, **35**, 461.
Pauli, W. & Villars, F. (1949). *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434.
Peccei, R. D. (1980). In *Particle Physics 1980*, eds. L. Andrie et al. Amsterdam: North Holland.
Perkins, D. H. (1982). *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A**304**, 23.
Perl, M. et al. (1976). *Phys. Lett.*, **63B**, 466.
Peruzzi, I. et al. (1976). *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 569.
Politzer, H. D. (1973). *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346.
Prescott, C. Y. et al. (1978). *Phys. Lett.*, **77B**, 347.
Ramond, P. (1981). *Field Theory*. Reading, Mass.: Benjamin.
Ross, D. A. (1978). *Nucl. Phys.*, B**140**, 1.
Sakurai, J. J. (1960). *Ann. Phys.*, **11**, 1.
Salam, A. (1960). *Nucl. Phys.*, **18**, 681.
Salam, A. (1968). In *Elementary Particle Theory*, p. 367, ed. N. Svartholm. Stockholm: Almquist Forlag AB.
Salam, A. & Ward, J. C. (1964). *Phys. Lett.*, **13**, 168.

Schwinger, J. (1951). *Phys. Rev.*, **82**, 664.
Schwinger, J. (1957). *Ann. Phys.* (N.Y.), **2**, 407.
Schwinger, J. (ed.) (1958). *Quantum Electrodynamics (Selected Papers on)*. New York: Dover.
Schwinger, J. (1962). *Phys. Rev.*, **125**, 397.
Sirlin, A. (1980). *Phys. Rev.*, **D22**, 971.
Slavnov, A. (1972). *Theor. and Math. Phys.*, **10**, 99.
Steinberger, J. (1949). *Phys. Rev.*, **76**, 1180.
Stuckelberg, E. C. G. (1938). *Helv. Phys. Acta*, **11**, 225
Sutherland, D. G. (1966). *Phys. Lett.*, **23**, 384.
Sutherland, D. G. (1967). *Nucl. Phys.*, **B2**, 433.
Takahashi, Y. (1957). *Nuovo Cimento*, **6**, 370.
Taylor, J. C. (1958). *Phys. Rev.*, **110**, 1216.
Taylor, J. C. (1971). *Nucl. Phys.*, **B33**, 436.
Taylor, J. C. (1978). *Gauge Theories of Weak Interactions*. Cambridge University Press.
Tilley, D. R. & Tilley, J. (1974). *Superfluidity and Superconductivity*. New York: Van Nostrand Reinhold.
Tomozawa, Y. (1966). *Nuovo Cimento*, **46**A, 707.
't Hooft, G. (1971*a*). *Nucl. Phys.*, **B33**, 173.
't Hooft, G. (1971*b*). *Nucl. Phys.*, **B35**, 167.
't Hooft, G. (1971*c*). *Nucl. Phys.*, **37B**, 195.
't Hooft, G. (1976). *Phys. Rev.*, **D14**, 3432.
't Hooft, G. (1978). *Phys. Rev.*, **D18**, 2199.
't Hooft, G. (1980). In *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft et al. The Cargèse School (1979). New York, London: Plenum.
't Hooft, G. & Veltman, M. (1972*a*). *Nucl. Phys.*, **B44**, 189.
't Hooft, G. & Veltman, M. (1972*b*). *Nucl. Phys.*, **B50**, 318.
Utiyama, R. (1956). *Phys. Rev.*, **101**, 1597.
Veltman, M. (1967). *Proc. Roy. Soc.*, **A301**, 107.
Waller, I. (1930*a*). *Z. Phys.*, **59**, 168.
Waller, I. (1930*b*). *Z. Phys.*, **62**, 673.
Ward, J. C. (1950). *Phys. Rev.*, **78**, 1824.
Weinberg, S. (1966). *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 616.
Weinberg, S. (1967). *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264.
Weinberg, S. (1975). *Phys. Rev.*, **D11**, 3583.
Weinberg, S. (1979). *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1566.
Weinberg, S. (1980). *Rev. Mod. Phys.*, **52**, 515.
Weinberg, S. (1981). *Sci. American*, **244** (6), 52.
Weissberger, W. (1965). *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1047.
Weyl, H. (1927). *Z. Phys.*, **56**, 330.
Wilczek, F. & Zee, A. (1979). *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 1571.
Wilson, K. G. (1971). *Phys. Rev.*, **B4**, 3174.
Yang, C. N. (1977). *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **294**, 86.
Yang, C. N. & Mills, R. L. (1954). *Phys. Rev.*, **96**, 191.

索　引

D,E

F

G

H

I

J

K

L,M

N,O

P

Q

R

訳者紹介

ふじ い あきひこ
藤井昭彦

1953年　東京大学理学部物理学科卒業
1958年　Rochester 大学大学院卒業，Ph. D.
現　在　上智大学理工学部物理学科・教授
主要著訳書　ベータ崩壊と弱い相互作用（培風館，共著）
ゲージ理論入門 I，II（講談社，訳書）

NDC 421　　208 p.　　21 cm

ゲージ場入門

1985年 2 月 1 日　第 1 刷発行
1992年 4 月20日　第 4 刷発行

定　価　2,900円（本体2,816円）
訳　者　藤井昭彦
発行者　野間佐和子
発行所　株式会社　講談社
〒112-01 東京都文京区音羽2-12-21
販売部　(03)5395-3624
製作部　(03)5395-3615
編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　加藤勝久
〒162 東京都新宿区新小川町9-25 日商ビル
編集部　(03)3235-3701
印刷所　株式会社平河工業社・株式会社興陽社
製本所　株式会社堅省堂

落丁本・乱丁本は，講談社書籍製作部宛にお送り下さい．
送料小社負担にてお取替えします．

ISBN4-06-139604-8　(KS)